

PROBLEMI D'ESAME 3

18.05.2022

Problema 1

Tra due piani infiniti con densità di carica uniforme $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 = -3\sigma_1$ c'è un dipolo elettrico $\vec{p} = p \vec{u}_y$ con $p = 3 \cdot 10^{-15} \text{ C m}$. Successivamente, il dipolo sotto l'azione del campo elettrostatico $\vec{E}$ dato ai due piani carichi, si trova in equilibrio stabile. Il corrispondente lavoro compiuto da $\vec{E}$ è

$$W = 5 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Determinare

1) $\vec{E}$ tra i piani

2) σ_1

Una carica negativa $q = -800 \text{ pC}$ è emessa dal piano di sinistra con energia cinetica $E_c = 3 \cdot 10^{-8} \text{ J}$.

Determinare

3) la distanza del piano di emissione a cui si ferma

$$\sigma_1 > 0$$

+

+

+

+

+

+

$$\vec{\sigma}$$

$$q < 0$$

$$-3\sigma_1 < 0$$

-

-

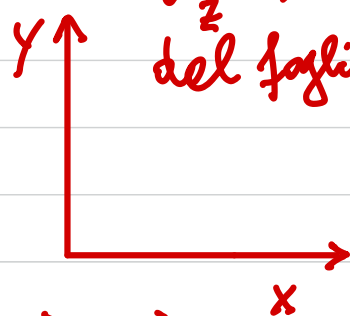
-

-

-

-

$\vec{u}_z$: uscente
del foglio



$$\vec{u}_z = \vec{u}_x \times \vec{u}_y$$

$$= (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

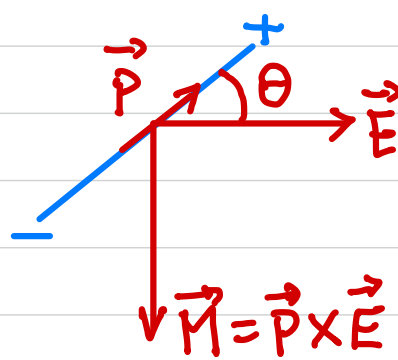
Momento meccanico su un dipolo

$$= (\vec{u}_{x,y} \vec{u}_{y,z} - \vec{u}_{x,z} \vec{u}_{y,y} = 0,$$

$$\vec{u}_{x,z} \vec{u}_{y,x} - \vec{u}_{x,x} \vec{u}_{y,z} = 0,$$

$$\vec{u}_{x,x} \vec{u}_{y,y} - \vec{u}_{x,y} \vec{u}_{y,z} = 1)$$

$$= (0, 0, 1) \quad \vec{u}_{i,k} = \text{componente } k \text{ di } \vec{u}_i$$



$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$$

angolo tra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E} = pE \sin(2\pi - \theta) \vec{u}_z = -pE \sin \theta \vec{u}_z$$

Il lavoro di $\vec{M}$ per ruotare il dipolo da θ_1 a θ_2 è

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = -pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = pE (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

(Si vedano le note aggiunte dopo l'ultimo esercizio)

Il campo elettrostatico tra le due cariche è

$$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{u}_x = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x. \text{ Poiché } \vec{p} = p\vec{u}_y, \text{ si ha}$$

che l'angolo tra $\vec{p}$ ed $\vec{E}$ è $\frac{\pi}{2}$.

Quindi $W = pE(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}) = pE$, da cui

1) $E = \frac{W}{p} = 1.67 \frac{\text{KV}}{\text{m}}$

2) $E = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = \frac{\epsilon_0 E}{2} = 7.38 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$

3) Poiché l'energia meccanica si conserva,
si ha

$$\Delta U + \Delta E_c = 0 \rightarrow q\Delta V - E_c = 0$$

D'altronde

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x \rightarrow \Delta V = -Ex$$

da cui

$$-qEx - E_c = 0$$

e

$$x = -\frac{E_c}{qE} = 2.25 \text{ cm}$$

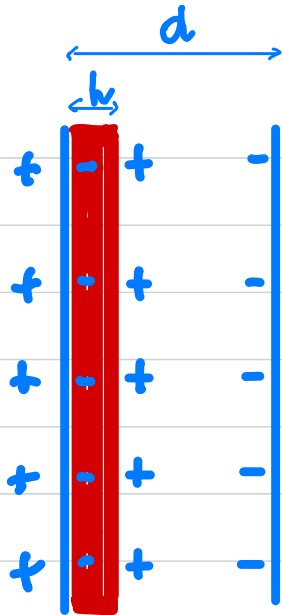
Problema 2

In un condensatore piano con armature quadrate di lato $L = 30 \text{ cm}$ distanti $d = 2 \text{ cm}$ è inserita una lastra quadrata di materiale isolante di spessore $h = 0.5 \text{ cm}$ e lati $L = 30 \text{ cm}$ e costante dielettrica relativa $\kappa = 2$. Il condensatore è collegato ad un generatore che mantiene una d.d.p. V . In queste condizioni la carica sulle armature del condensatore risulta $q = 6.85 \text{ mC}$.
Calcolare

1) la d.d.p. V

2) il campo elettrostatico all'interno dell'isolante E_d

3) la "carica di polarizzazione", cioè la carica q_p sulle superfici dell'isolante q_p



$$L = 30 \text{ cm}$$

$$d = 2 \text{ cm}$$

$$h = 0.5 \text{ cm}$$

$$q = 6.85 \text{ mC}$$

$$k = 2$$

1) Questa configurazione è equivalente a due condensatori in serie di capacità C_0 e C_d . In tal caso la capacità equivalente è

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_d} = \frac{d-h}{\epsilon_0 L^2} + \frac{h}{\epsilon_0 k L^2} = 21.9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1}$$

da cui segue

$$V = \frac{q}{C_{eq}} = 150 \text{ V}$$

2) All'interno del dielettrico il campo elettrostatico è

$$E_d = \frac{V_d}{h} = \frac{1}{h} \frac{q}{C_d} = 4.25 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

si noti che q è la carica delle armature e che quando $h = d$ si ha $C_d = q/V_d$, come deve essere.

che si può anche ottenere osservando che

$$V = E_0(d-h) + E_d h = E_d \kappa(d-h) + E_d h$$

da cui segue

$$E_d = \frac{V}{\kappa(d-h) + h}$$

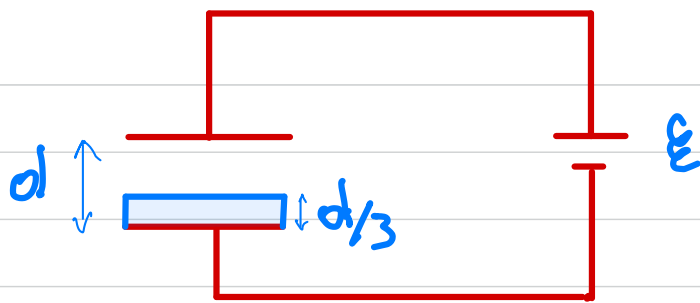
3) La densità di carica sulle facce del dielettrico è $\sigma_p = \frac{\kappa-1}{\kappa} \sigma$, dove σ è la densità di carica sulle armature. Poiché l'area delle armature è la stessa delle facce del dielettrico, si ha

$$q_p = \frac{\kappa-1}{\kappa} q = 3.42 \text{ nC}$$

Problema 3

Un condensatore piano con le armature di area $\Sigma = 400 \text{ cm}^2$, distanti $d = 6 \text{ cm}$, è riempito per $\frac{d}{3}$ con un dielettrico con $\kappa = 3$. Quando la d.d.p. mantenuta da un generatore è $\mathcal{E}$, la carica di polarizzazione presente sulle due superfici del dielettrico è $q_p = 2.03 \text{ nC}$. Calcolare

1. la d.d.p. tra le armature $\mathcal{E}$
2. la quantità di carica aggiuntiva fornita dal generatore se la lstra di dielettrico è estratta Δq
3. il lavoro fatto dal campo elettrostatico nell'estrazione del dielettrico $\mathcal{W}$



$$\begin{aligned}\Sigma &= 400 \text{ cm}^2 \\ d &= 6 \text{ cm} \\ K &= 3 \\ q_p &= 2.03 \text{ nC}\end{aligned}$$

1. Il condensatore con dielettrico che non riempie tutto lo spazio tra le armature ha una capacità ricavabile considerando il sistema equivalente a due condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} = \frac{d}{\varepsilon_0 \Sigma} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3K} \right)$$

$$C_{eq} = \frac{3K\varepsilon_0 \Sigma}{d(2K+1)} = 7.59 \text{ pF}$$

D'altronde, la carica sulle armature è

$$q = \frac{K}{K-1} q_p = 3.05 \text{ nC} \quad 1)$$

per cui

$$\varepsilon = \frac{q}{C_{eq}} = 401 \text{ V}$$

2. Dopo l'estrazione del dielettrico la capacità è

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} = 5.9 \text{ pF}$$

D'altronde, come specificato nel testo, la d.d.p. tra le armature è mantenuta costante, per cui la carica sulle armature è

$$q_0 = C_0 \mathcal{E} = 2.37 \text{ nC}$$

che insieme a 1) implica

$$\Delta q := q_0 - q = -0.68 \text{ nC}$$

3.

$$W = -\Delta U_e = U_i - U_f = \frac{q^2}{2C_{eq}} - \frac{q_0^2}{2C_0} = 1.36 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Problema 4

Una bacchetta di rame cilindrica omogenea lunga $d = 8 \text{ cm}$ è percorsa da una corrente elettrica stazionaria $i = 5 \text{ A}$.

Resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Densità portatori di carica $n = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Velocità di deriva $v_d = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

Carica elementare $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Determinare

1. Il campo elettrico che genera il moto dei portatori di carica

E

2. la resistenza del conduttore

R

3. l'energia dissipata per effetto Joule sul conduttore in $t = 5 \text{ minuti}$

W

1. Legge di Ohm $E = \rho j = \rho n e v_d = 92 \text{ mV/m}$

2. $R = \rho \frac{d}{\Sigma}$, $i = j \Sigma$,

$$R = \rho \frac{d j}{i} = \frac{\rho n e v_d}{i} = 1.48 \text{ m}\Omega$$

oppure $V = E d = R i$ $R = \frac{E d}{i}$

3. Segue dalla legge relativa all'effetto Joule

$\nwarrow$ potenza dissipata

$$W_R = P_R t = R i^2 t = 11 \text{ J}$$

Problema 5

Un blocchetto sferico di rame di raggio $R = 5 \text{ cm}$ è colpito da un fascio di protoni di corrente $i = 70 \text{ nA}$ che si fermano nel blocco. Inizialmente il blocco è elettricamente neutro e isolato e la durata dell'impulso di corrente è $\tau = 3 \text{ s}$.

Calcolare

1. Il potenziale rispetto all'infinito a cui si porta la sfera

2. Il numero di impulsi necessari ad accumulare un'energia elettrostatica $U_e = 485.54 \text{ J}$

1.
$$q = \int_0^\tau i dt = i\tau = 210 \text{ nC}$$

per cui

$$V_{\text{sfera}} - V(\infty) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = 37.7 \text{ kV}$$

||
0
↑ scegliamo

2.

Trattandosi di un conduttore sferico, la carica si dispone uniformemente. Poiché l'energia potenziale di una distribuzione sferica di cariche è (si veda la nota sotto)

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

(intendendo $U_\infty = 0$), e considerato che dopo N impulsi la carica è $Q = Nq$, si ha

$$U_e = \frac{(Nq)^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

quindi

$$N = \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 R U_e}}{q} = 350$$

2. L'energia elettrostatica di una distribuzione sferica di carica è

$$dU_e = dqV = dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove R è il raggio della sfera. Quindi

$$U_e = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

dove Q è la carica totale. Si ricordi che U_e è l'energia necessaria per portare le cariche dall'infinito ad una data configurazione. Nel caso in esame è il lavoro esterno ad essere positivo mentre il campo elettrostatico compie lavoro negativo, cioè acquista energia.

Si noti anche che per U_e si intende

$$U_e(R) - U_e(\infty) \quad e \quad V = V(R) - V(\infty).$$

Si noti che una sfera uniformemente carica è equivalente a un condensatore sferico con un'armatura all'infinito. Come visto a lezione, l'energia elettrostatica di un condensatore di carica Q è $\frac{1}{2} QV$, che riproduce l'espressione sopra derivata.

È utile sottolineare che l'energia potenziale di un sistema di più cariche è diversa dall'energia potenziale di una carica q in presenza di altre cariche. Per esempio, nel caso di 3 cariche q_1, q_2, q_3 , si ha che l'energia potenziale di q_1 è $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right)$ mentre l'energia elettrostatica del sistema è la precedente a cui va aggiunto $\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$.