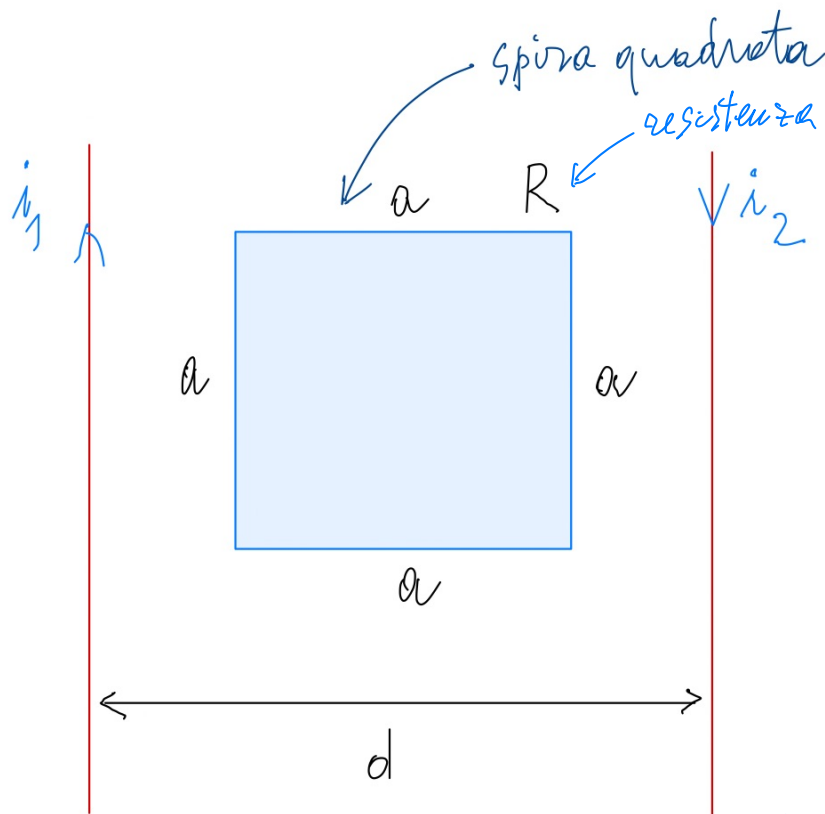


# PROBLEMA



Una spira quadrata di lato  $a$  è equidistante da due fili conduttori indefiniti percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$  antiparallele.

Sia  $\vec{B}_k$  il campo magnetico generato dalle correnti  $i_k$ ,  $k=1,2$ .

1. Determinare il flusso  $\Phi(\vec{B}_k)$  attraverso la spira.
2. Esprimere  $i_1$  in funzione di  $i_2$ ,  $\Phi(\vec{B})$  e  $\Phi(\vec{B}_1)$ , dove  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ .
3. Determinare la carica totale che attraversa la spira durante una sua rotazione di  $90^\circ$  intorno all'asse passante per il centro della spira e parallelo ai due fili conduttori.

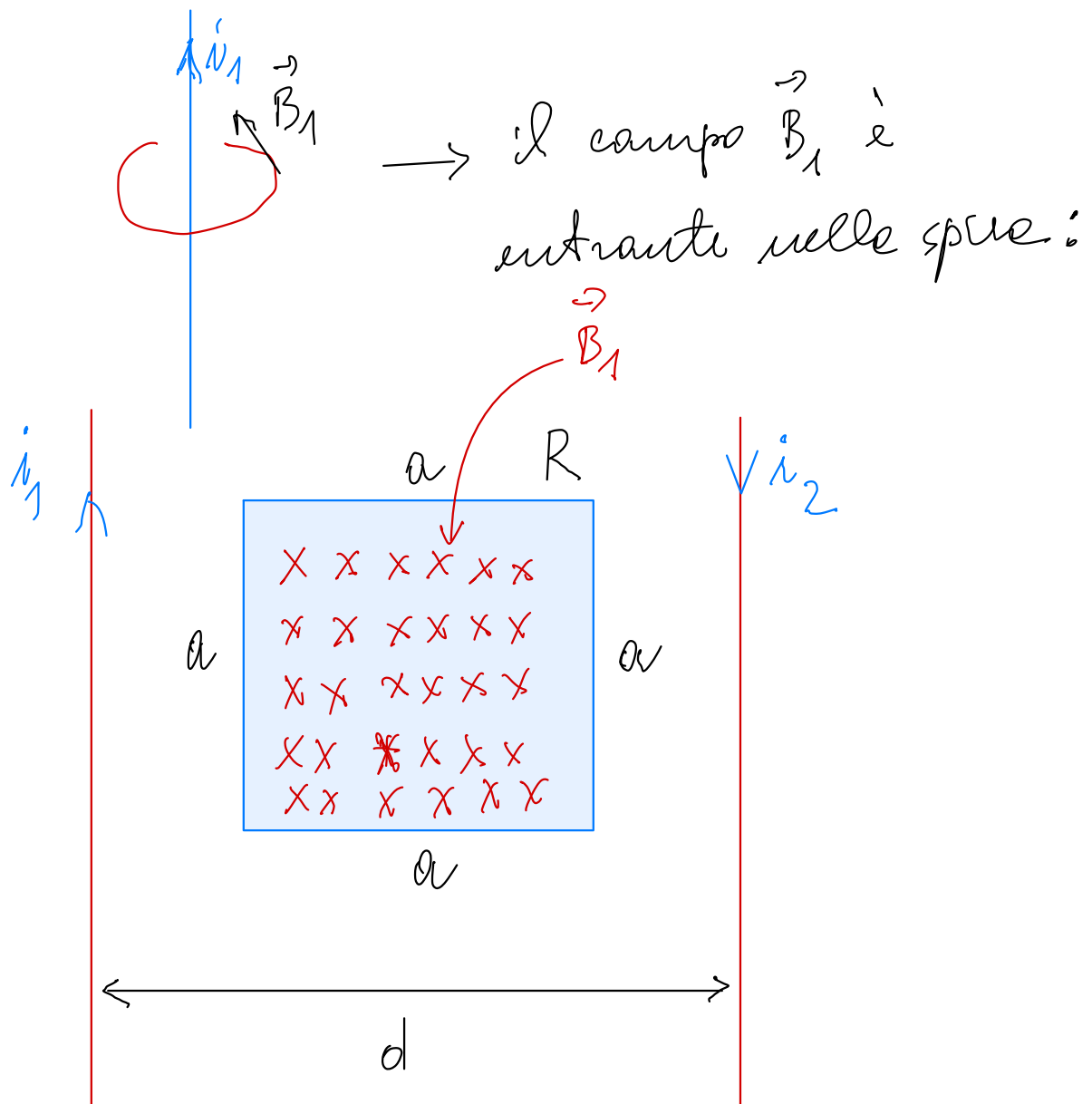
1.  $\Phi(\vec{B}_1)$ :

Definizione di flusso

$$\Phi(\vec{B}_1) := \int_{\Sigma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\Sigma}$$

Nel caso in esame  $\Sigma$  è la spira.

Si noti che



Campo magnetico generato da un filo  
infinito è

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u}_\phi$$

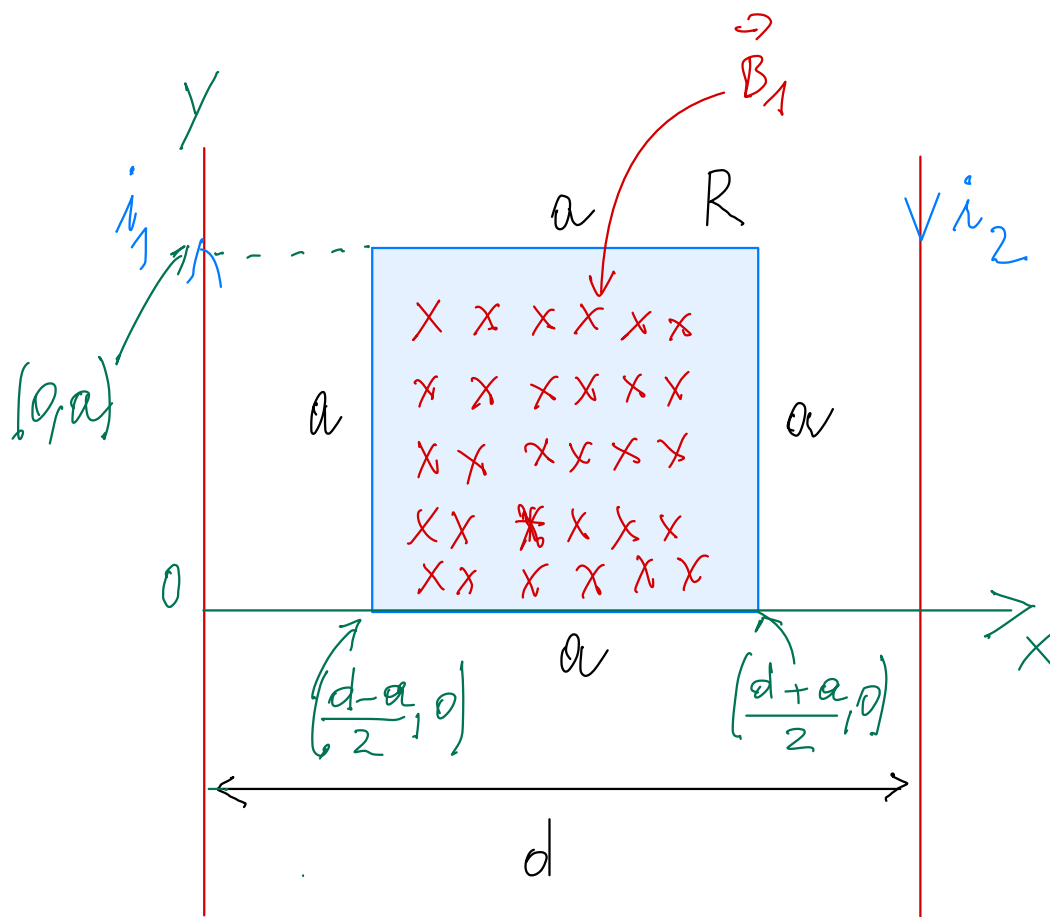
Il valore del flusso dipende da quale delle  
due possibili orientazioni di  $\Sigma$  si sceglie. Se  
scegliamo la direzione entrante nel foglio,  
allora  $\vec{B}_1$  è parallelo a  $\vec{\Sigma}$ . Otteniamo per  
questa scelta.

$$\Phi(\vec{B}_1) = \int_{\text{spina}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\text{spina}} B_1 d\Sigma$$

Si noti che, trattandosi di spina piana  
quadrata, conviene usare le coordinate  
cartesiane  $x, y$ . In tal caso

$$d\Sigma = dx dy$$

Per stabilire gli estremi di integrazione  
consideriamo la figura



$$\frac{d-a}{2} \leq x \leq \frac{d+a}{2} \quad 0 \leq y \leq a$$

Un altro punto da tener presente è che  $\vec{B}_1$  non dipende da  $y$ , quindi

$$\int_{\text{spine}} B_1 d\vec{\Sigma} = \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} dx \int_0^a dy \frac{\mu_0 i}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \left( \ln \frac{d+a}{2} - \ln \frac{d-a}{2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

Riassumendo, si ha

$$\phi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

2.

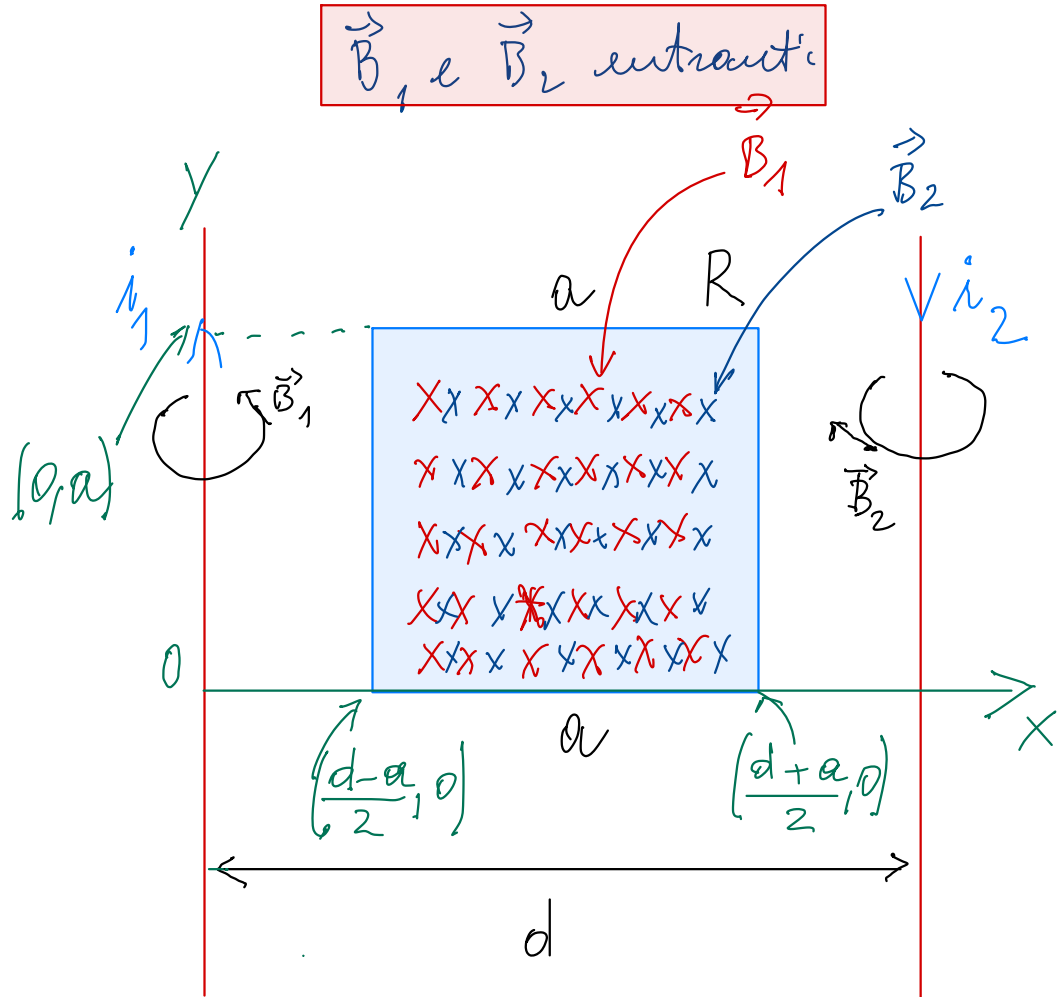
Analogamente

$$\oint_{\vec{r}} \vec{B}_2 \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} a \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 i_2 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a} = \frac{i_2}{i_1} \Phi(\vec{B}_1)$$

Abbiamo utilizzato le seguenti

**OSSERVAZIONE:** poiché la spira si trova fra i due fili e poiché il verso delle correnti è opposto, si ha che i campi magnetici generati dalle due correnti sono paralleli all'interno della spira, quindi stesso verso.



$$\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2 \rightarrow \Phi(\vec{B}_1) \text{ e } \Phi(\vec{B}_2)$$

hanno lo stesso segno.

$$\Phi(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \Phi(\vec{B}_1) + \Phi(\vec{B}_2) = \Phi(\vec{B}_1) \left( 1 + \frac{i_2}{i_1} \right)$$

$$\Rightarrow i_2 = i_1 \frac{\Phi(\vec{B}) - \Phi(\vec{B}_1)}{\Phi(\vec{B}_1)}$$

3. Per rispondere a queste domande, è necessario utilizzare la legge di Faraday, già vista a lezione.

Questo si ottiene a partire dalla legge di Faraday

$$i = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

l'altra, poiché

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{si ha } q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

legge di Faraday

$$- \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi$$

Quindi la carica che fluisce in una spira nell'intervallo di tempo  $t_2 - t_1$  non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dalla differenza tra il suo valore iniziale e quello finale.

Nel caso del problema si ha:

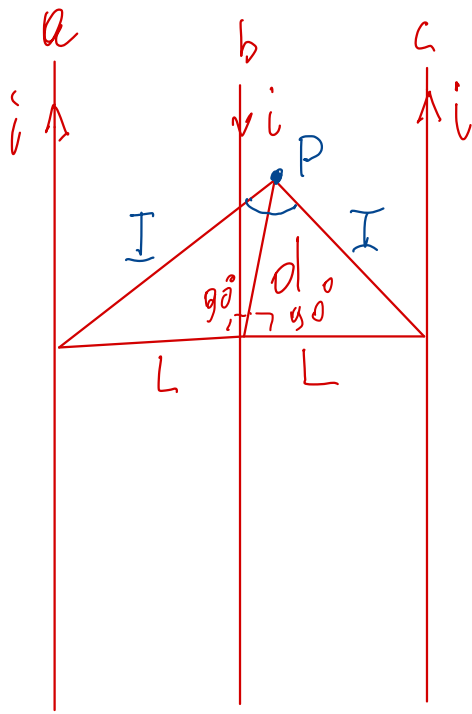
$$\Delta q = q_f - q_i = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = \frac{\Phi_i(\vec{B})}{R}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il valore finale del flusso è zero in quanto la spina si trova in posizione verticale rispetto al campo magnetico, e quindi

$$\Phi_f = \int_{\text{spine}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Nd dominio di integrazione  
si ha  $\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} =$

$$B d\Sigma \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



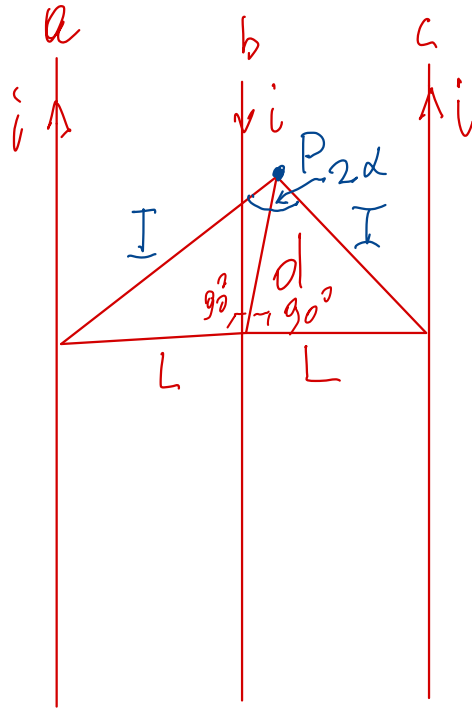
Tre fili paralleli indefiniti  $a, b, c$ . Il filo  $a$  dista  $L$  da  $b$  e  $2L$  da  $c$ .

Ogni filo è percorso dalla stessa corrente  $i$ . Le densità di corrente che fluiscono in  $a$  e  $c$  sono anche equiverse mentre il verso della densità di corrente che fluisce in  $b$  è opposto. Determina

1. Il modulo del campo magnetico nel punto  $P$  distante  $d$  dal filo  $b$  ed equidistante rispetto ad  $a$  e  $c$ .
2. Il modulo della forza per unità di lunghezza esercitata dal filo  $a$  sul filo  $b$  e dal filo  $c$  sul filo  $b$ .

3. Il valore che dovrebbe avere la corrente che fluisce nel filo c affinché il modulo della forza totale per unità di lunghezza esercitata sul filo b sia  $F_b$  e diretta verso il filo a.

1.



$$I = \sqrt{d^2 + L^2}$$

$$d = I \cos \alpha$$

$$= \sqrt{d^2 + L^2} \cos \alpha$$

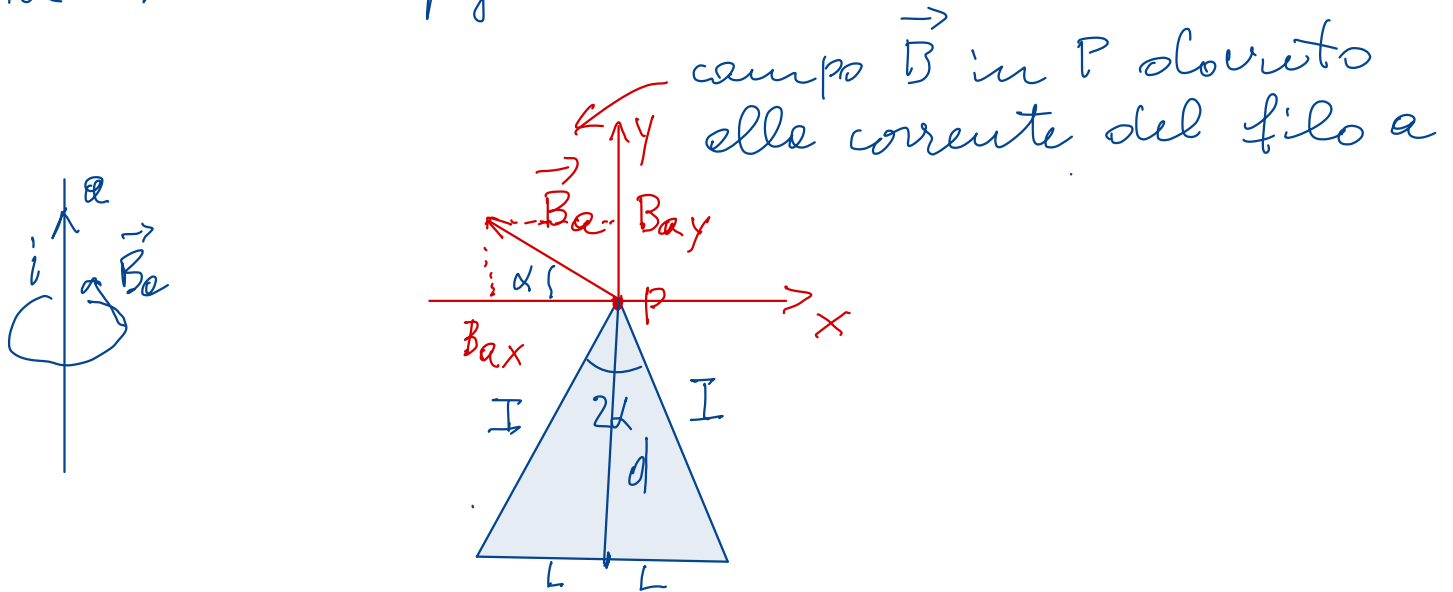
$$L = I \sin \alpha$$

$$= \sqrt{d^2 + L^2} \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{L}{d} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{L}{d}$$

N.B. I conti dipendono dalle scelte del verso delle correnti.

Nel caso delle figure abbiamo

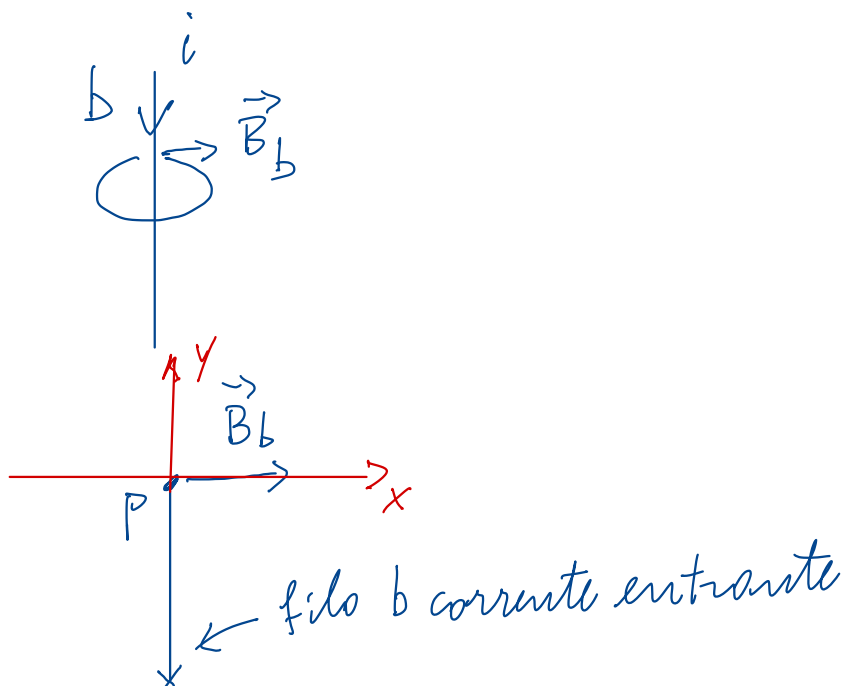


$$\vec{B}_a(P) = -|\vec{B}_a| \cos \alpha \vec{u}_x + |\vec{B}_a| \sin \alpha \vec{u}_y$$

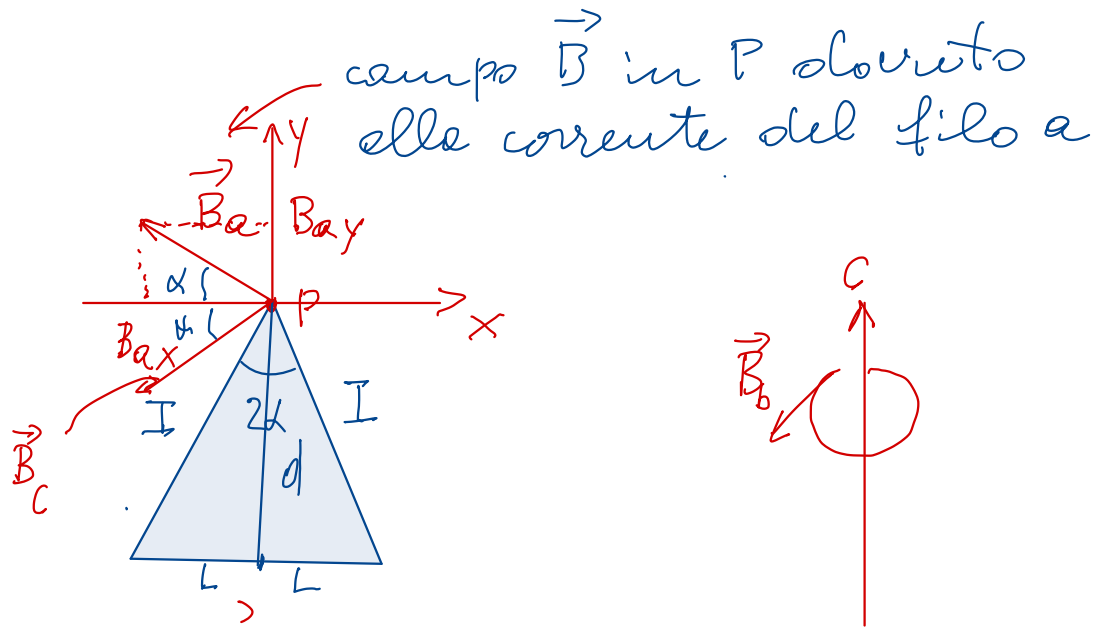
dove  $|\vec{B}_a| = \frac{\mu_0 i}{2\pi I} = \frac{\mu_0 \hat{I}}{2\pi \sqrt{d^2 + L^2}}$

Nel caso del campo in P generato dal filo b si ha

quindi



$$\vec{B}_b(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_x$$



Quindi

$$\vec{B}_C = -|\vec{B}_C| \cos \alpha \vec{u}_x - |\vec{B}_C| \sin \alpha \vec{u}_y$$

ovvero  $|\vec{B}_C| = \frac{\mu_0 i}{2\pi I} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{d^2 + L^2}}$

Quindi il campo magnetico totale in P è

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \vec{B}_e(P) + \vec{B}_b(P) + \vec{B}_c(P) \\ &= (-2 |\vec{B}_e| \cos \alpha + |\vec{B}_b|) \vec{u}_x \\ &= \left( -2 \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{L^2 + d^2}} \cos \alpha + \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right) \vec{u}_x\end{aligned}$$

D'altronde

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{L^2 + d^2}}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \left( -\frac{d}{L^2 + d^2} + \frac{1}{2d} \right) \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{L^2 - d^2}{2d(L^2 + d^2)} \vec{u}_x\end{aligned}$$

il cui modulo è

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{|L^2 - d^2|}{2d(L^2 + d^2)}$$

2. Come visto a lezione, la forza per unità di lunghezza tra due fili paralleli percorsi da correnti  $i_1$  e  $i_2$  è

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi L}$$

dove  $L$  è la loro distanza. La forza è attrattiva se  $i_1$  e  $i_2$  sono equiverse, repulsiva se non lo sono.

Nel caso del problema, la forza per unità di lunghezza tra i fili a e b è la stessa che c'è tra b e c. Tale forza è repulsiva e di modulo

$$|\vec{F}_{ab}| = |\vec{F}_{bc}| = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi L}$$

3. le forze per unità di lunghezza totale che agisce sul filo b è nulla; b è respinto con uguale intensità da a e c.

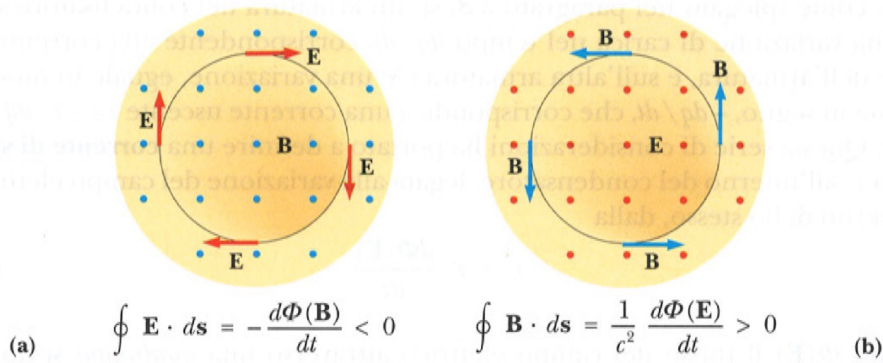
Quindi la variazione di corrente  $\Delta i$  che dovrebbe avere il filo c affinché le forze totali per unità di lunghezza sia pari a  $|\vec{F}_b|$  e diretta verso il filo e, deve soddisfare la relazione

$$|\vec{F}_b| = \frac{\mu_0(i + \Delta i)i}{2\pi L} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \Delta i$$

da cui

$$\Delta i = \frac{2\pi L}{\mu_0 i} \vec{F}_b$$

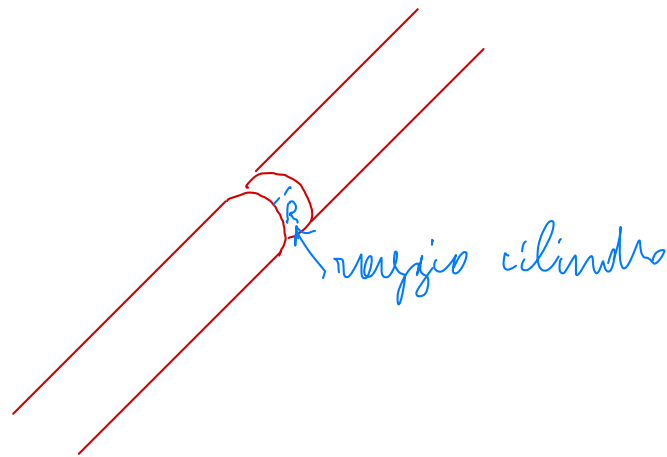
# SIMMETRIA $\vec{E} - \vec{B}$



**Figura 8.32**

Campi elettrici indotti da variazioni di campo magnetico nel tempo (a) e campi magnetici indotti da variazioni di campo elettrico nel tempo (b).

Si consideri una lunga sbarra conduttrice cilindrica di raggio  $R$  con una piccola fessura. La sbarra è attraversata da una corrente  $i = \alpha t$ , con  $\alpha$  una costante. Al tempo  $t=0$  non c'è alcuna carica sulle facce del taglio.



Determinare

1. Modulo della carica sulle facce del taglio a  $t \geq 0$
2.  $\vec{E}$  nell'intercapedine a  $t \geq 0$
3.  $\vec{B}$  all'interno dell'intercapedine
4.  $\vec{B}$  all'interno della sbarra

1.  $q = \int_0^t \alpha t' dt' = \frac{\alpha t^2}{2}$

2. le due facce giocano il ruolo di armature di un condensatore piano. Quindi  $|\vec{E}| = \sigma/\epsilon_0$ , dove

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

quindi

$$\vec{E} = \frac{\alpha t^2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_n$$

dove  $\vec{u}_n$  è il versore perpendicolare al disco dove si accumula la carica  $q$  (l'altra faccia ha carica  $-q$ . Si noti che il segno di  $q$  dipende dal segno di  $\alpha$ ).

3. Consideriamo l'equazione di Ampère - Maxwell

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{dt} \right)$$

dove  $\Sigma$  è qualsiasi superficie che abbia bordo  $\gamma$  (con orientamenti di  $\gamma$  e  $\vec{\Sigma}$  legati dalla regola della mano destra). Nel caso in esame scegliamo  $\gamma$  essere la circonferenza di raggio  $r$ , denotata  $S_r^1$ . Il flusso di  $\vec{E}$  è

$\Sigma_r$ : disco di raggio  $r$

$$\Phi_{\Sigma_r}(\vec{E}) := \int_{\Sigma_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi r^2 E = \frac{\alpha t^2 r^2}{2\epsilon_0 R^2}$$

All'interno dell'intercapedine la corrente di conduzione è nulla, inoltre

$$\oint_{S_r^1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B$$

per cui il campo  $\vec{B}$  all'interno delle fessure e a distanza  $r$  dall'asse del conduttore è

$$B = \frac{1}{2\pi r} \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi r^2 \alpha t^2}{2\pi \epsilon_0 R^2} \right)$$

cioè

$$B = \frac{\mu_0 \alpha t}{2\pi R^2} r$$

diretto tangenzialmente a  $S_r^1$ .

4. All'interno della sbarra non c'è corrente di spostamento. Inoltre, la corrente all'interno del cilindro di raggio  $r \leq R$  è

$$i(r) = i \frac{r^2}{R^2}$$

Infatti

$$i(r) = \int_{\Sigma_r} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi r^2 j \rightarrow i(R) = \pi R^2 j$$

$$\rightarrow j = \frac{i(R)}{\pi R^2} \rightarrow i(r) = \frac{\pi r^2 i(R)}{\pi R^2} = i \frac{r^2}{R^2} = \alpha t \frac{r^2}{R^2}$$

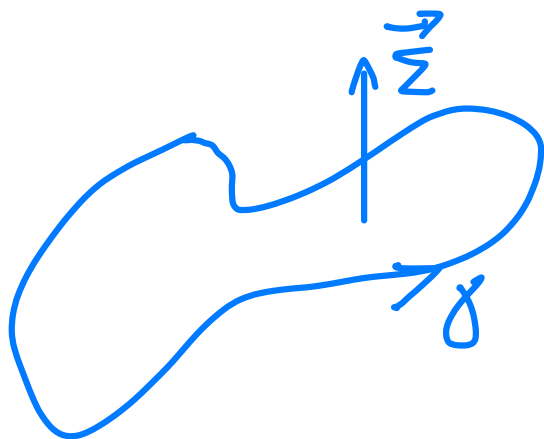
Quindi, poiché all'interno della sbarra non c'è la corrente di spostamento, si ha

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} i(r) = \frac{\mu_0 \alpha t}{2\pi R^2} r$$

che coincide con il campo  $\vec{B}$  interno alle fessure, infatti si ha che la corrente di spostamento e di conduzione coincidono:  $i_s = i_c$ .

# COMMENTI SUL FLUSSO DEI CAMPI VETTORIALI

Come visto più volte, mentre il verso dell'orientazione di una superficie chiusa è sempre scelto esterno ed arro, questo non è fissato nel caso in cui la superficie sia aperta. Abbiamo comunque osservato che, geometricamente, il verso di  $\vec{\Sigma}$  è collegato con quello del suo bordo  $\gamma = \partial \Sigma$  (che può anche essere espresso nelle forme  $\gamma = \partial \vec{\Sigma}$ , cosicché anche  $\gamma$  ha il verso fissato), tramite la regola della mano destra. Quindi



Ciò, per esempio, fissa il segno del membro destro nel teorema di Stokes

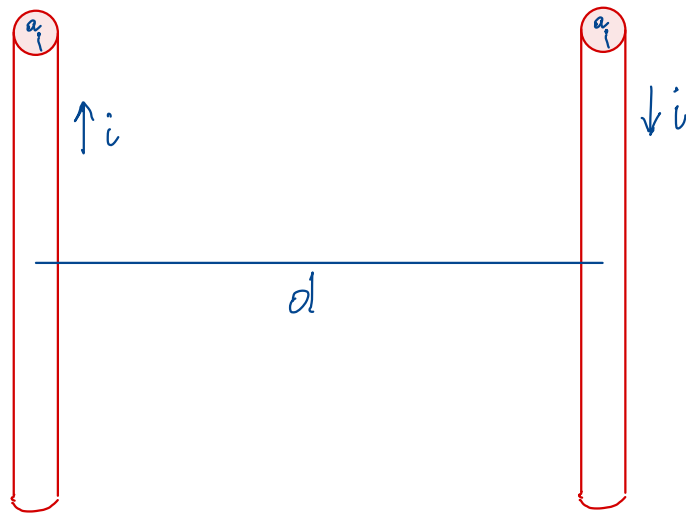
$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = + \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Abbiamo anche visto che, anche nel caso di superfici aperte, la scelta del verso di  $\vec{\Sigma}$  non influisce sulle osservabili (cioè misurabili) fisiche. In proposito abbiamo visto l'esempio della legge di Faraday: il verso della corrente è indipendente da tale scelta.

Va sottolineato che spesso nei problemi in cui è richiesto di calcolare il flusso di un vettore attraverso una superficie aperta non è specificata l'orientazione di questa, tutte e due le soluzioni sono considerate valide.



Fili paralleli indefiniti percorsi da correnti opposte



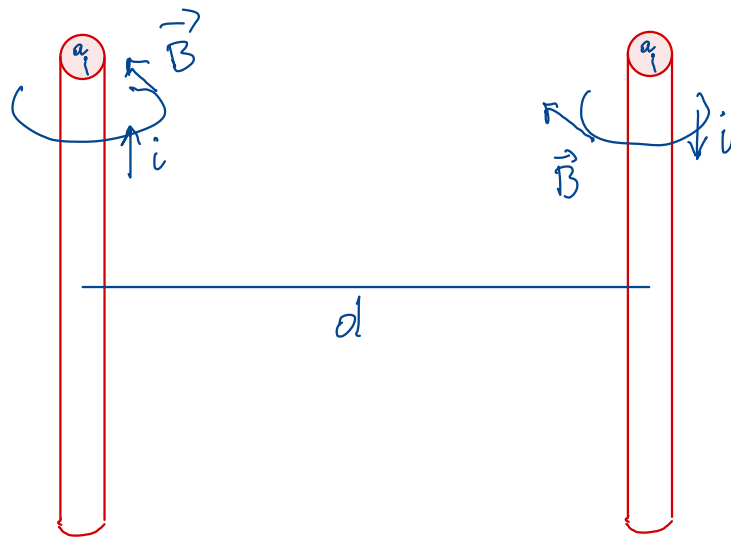
$d$  = distanza tra gli assi dei due conduttori

$a$  = raggio della base cilindrica

Determinare

1.  $\vec{B}$  in tutto il piano delimitato dai conduttori
2.  $\vec{E}$  tale che una particella carica che si trova tra i due conduttori, con velocità  $\vec{v}$  perpendicolare a  $\vec{B}$ , non subisca in quell'istante alcuna accelerazione
3. Il flusso di  $\vec{B}$  attraverso la superficie dei due conduttori per una porzione di lunghezza  $l$

$\vec{B}$  entrambi entranti nel foglio



1.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

N.B. esternamente ai fili il valore del campo magnetico è lo stesso che si avrebbe se il conduttore fosse unidimensionale. È la versione analogica di quanto succede con una distribuzione di carica su simmetrie sferica: esternamente alla sfera, il campo elettrico coincide con quello generato da una carica puntiforme, pari a quella corrispondente alla carica totale della distribuzione sferica.

2. la carica è soggetta alle forze di Lorentz e a quella coulombiana

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$|\vec{v} \times \vec{B}| = vB \rightarrow$$

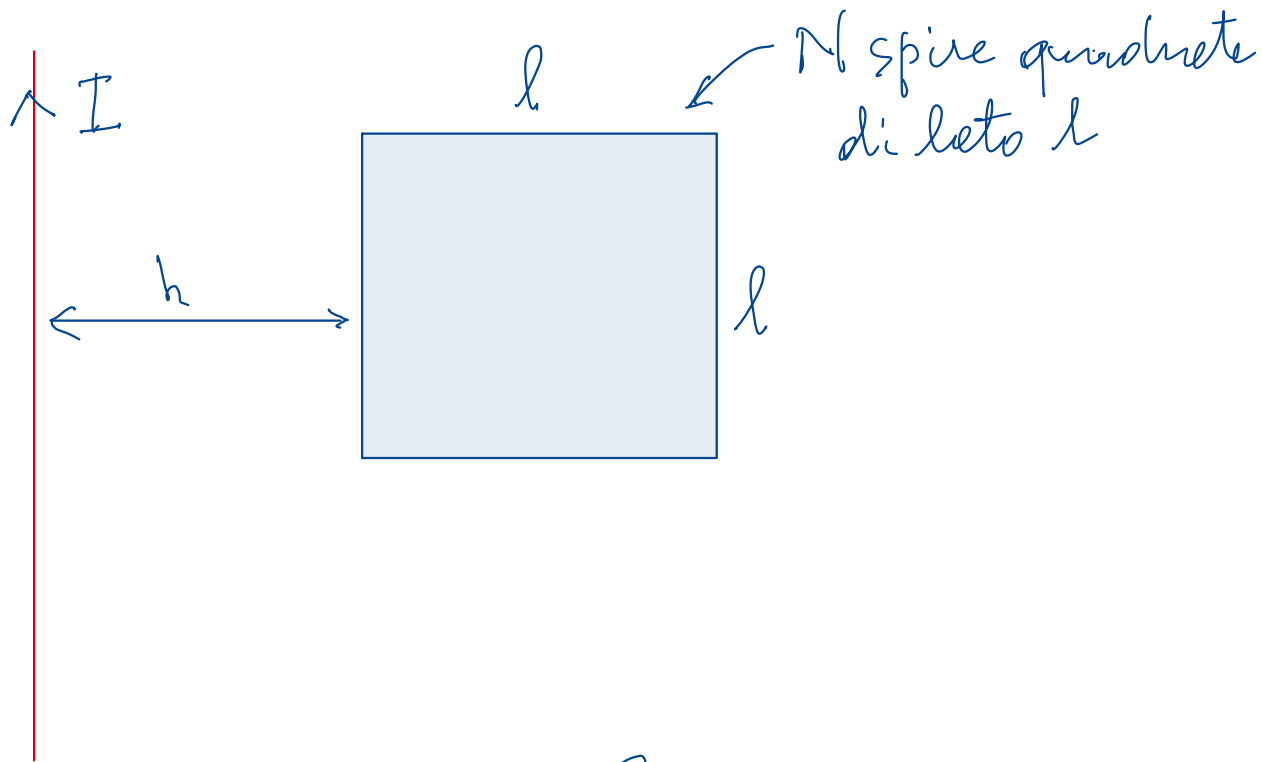
$$E = -vB$$

3.

$$\Phi(B) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int B d\Sigma = \int_0^l dy \int_a^{d-a} dx B$$

$$= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_a^{d-a} dx \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Una bobina di resistenza  $R$ , composta da  $N$  spire di lato  $l$ , si trova ad una distanza  $h$  da un filo infinito percorso da una corrente stazionaria

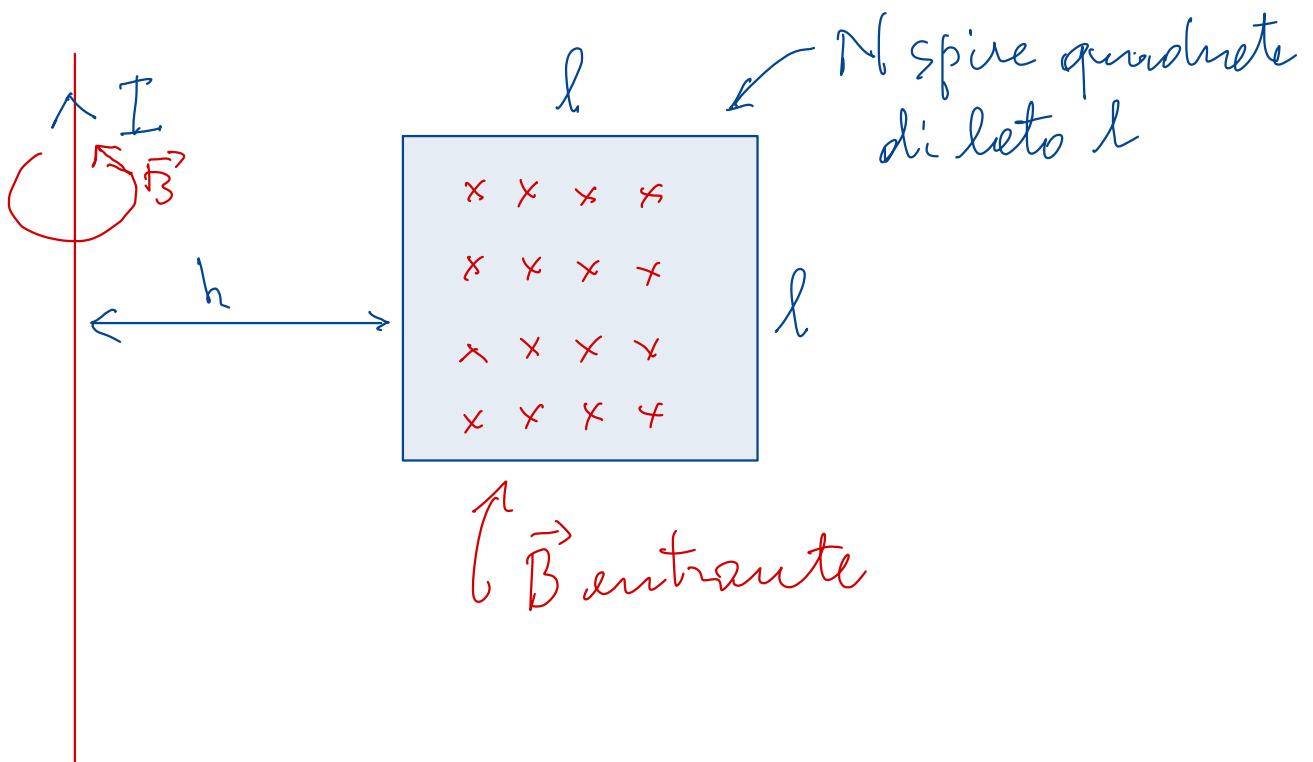


→  
1.  $B$  attraverso la bobina?

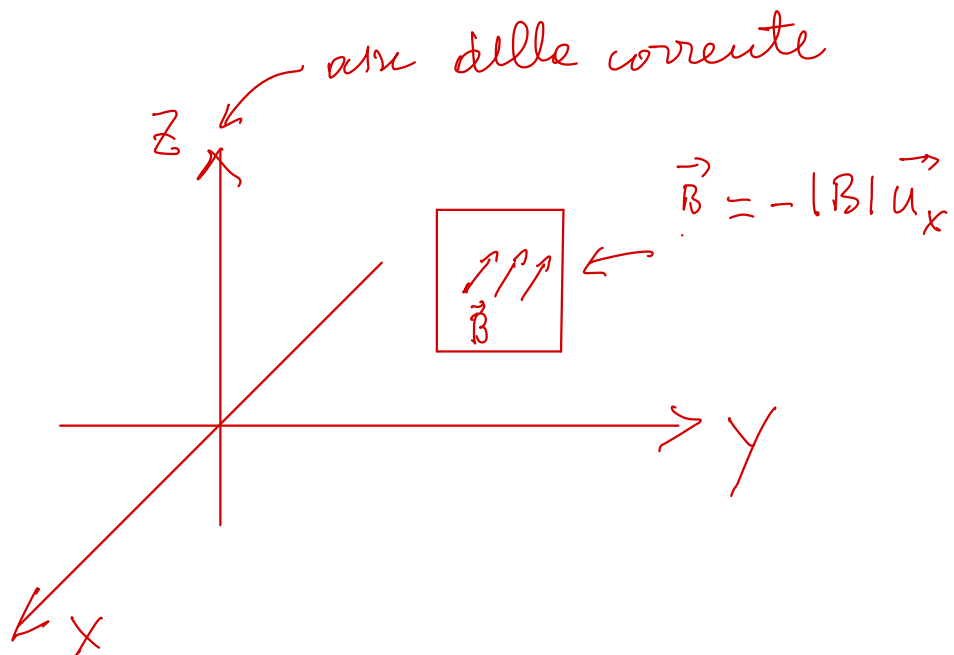
2. Calcolare la variazione di flusso e la corrente indotta nella bobina se quest'ultima si allontana dal filo con velocità costante

$$v = \frac{dh}{dt}$$

3. Determinare la forza da applicare alla bobina affinché questa mantenga la velocità costante.



1.  $B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$ . Si noti che l' direzione  
 e verso di  $B(x)$  all'interno della bobina è  
 $-\vec{u}_x$ :



$$\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(0, y, z)$$

la bobina è nel piano  $y$ - $z$ . Inoltre:  $\vec{B}$  non dipende da  $z$ .

$$\Phi(\vec{B}) = N \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = N \int_{\Sigma} B d\Sigma = N \int_h^{h+l} B l dy$$

$$= \frac{\mu_0 N I l}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h}$$

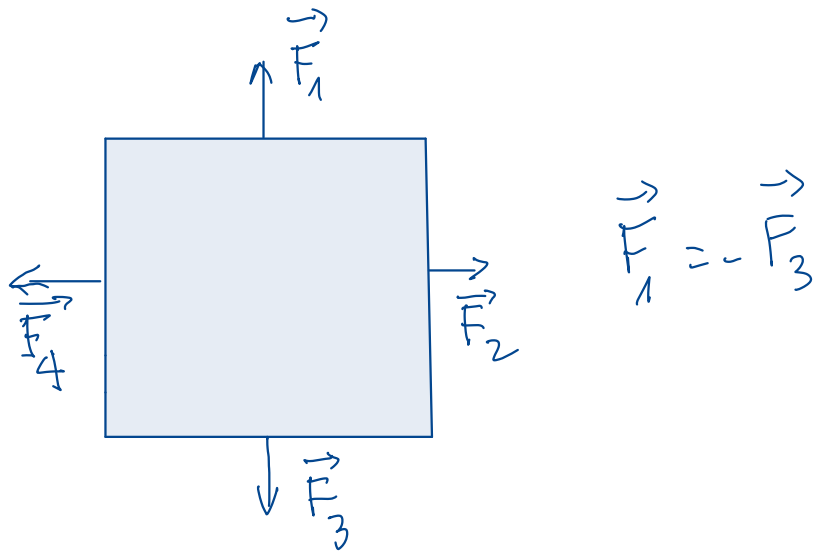
N.B. Abbiamo scelto l'orientazione di  $\vec{\Sigma}$  come quella di  $\vec{B}$ , quindi  $\rightarrow \vec{u}_x$

2. la corrente indotta dalla variazione di flusso dovuta allo spostamento delle spine è

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l^2 N v}{2\pi R h (l+h)}$$

3. Un conduttore percorso da corrente in un campo  $B$  è soggetto alle forze (II legge di Laplace)

$$\vec{F} = -i l \times \vec{B}$$



Forze totali sulle bobine

$$F_4 - F_2 = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2}$$

Quindi, affinché  $v$  rimanga costante, è necessario una forza di uguale intensità e verso opposto,