

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica e Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 29 Agosto 2022**

Problema 1

Si consideri la distribuzione di carica volumetrica $\rho(r \leq R) = A$, $\rho(r > R) = 0$, dove r è il modulo del raggio vettore. Determinare

1. la dimensione di A e la carica totale q della distribuzione ρ ,
2. il campo elettrostatico in tutto $\mathbb{R}^3$,
3. il potenziale elettrostatico $V(r)$ per $r \leq R$, in modo tale che $V(\infty) = 0$,
4. si risponda alle precedenti due domande nel caso di un conduttore sferico di raggio R e carica q .

Problema 2

Determinare la capacità equivalente di

1. tre condensatori in serie di capacità C_1 , C_2 e C_3 ,
2. due condensatori in parallelo di capacità C_1 e C_2 che sono in serie con un condensatore di capacità C_3 .

Problema 3

Una bobina quadrata conduttrice di lato l e resistenza R dista r da un filo conduttore rettilineo indefinito percorso dalla corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$. Determinare

1. il flusso del campo magnetico attraverso la bobina indotto da $i(t)$,
2. la corrente $i_b(t)$ indotta nella bobina,
3. il modulo della carica che percorre la bobina nell'intervallo $0 < t < \infty$.

Domanda. Descrivere le proprietà delle forze conservative.

Problema 1

1. $[A] = QL^{-3}$, $q = 4\pi AR^3/3$.
2. La legge di Gauss e la simmetria sferica della distribuzione di carica implicano

$$4\pi r^2 \vec{E}(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \vec{u}_r ,$$

dove $q(r)$ è la carica interna alla sfera di raggio r , cioè

$$q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' .$$

Si ha quindi

$$q(r \leq R) = \frac{4}{3}\pi Ar^3 , \quad q(r > R) = q(R) = q = \frac{4}{3}\pi AR^3 ,$$

da cui segue

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{q(r \leq R)}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{A}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r = \frac{A}{3\epsilon_0} \vec{r} ,$$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{q(r > R)}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{q(R)}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{q}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{AR^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r .$$

3. Il potenziale elettrostatico esternamente alla sfera carica è lo stesso di quello generato da una carica puntiforme q centrata nell'origine, quindi

$$V(r > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{AR^3}{3\epsilon_0 r} .$$

Si noti che la possibile costante additiva è nulla in quanto il testo richiede che $V(\infty) = 0$. All'interno della sfera carica il potenziale elettrostatico è

$$V(r \leq R) = -\frac{A}{6\epsilon_0} r^2 + B ,$$

con la costante B fissata dalla condizione di continuità per $r = R$

$$-\frac{A}{6\epsilon_0} r^2 + B = \frac{AR^2}{3\epsilon_0} ,$$

cioè

$$B = \frac{1}{2\epsilon_0} AR^2 .$$

4. Nel caso del conduttore sferico la carica è distribuita uniformemente sulla superficie. Il campo elettrico è nullo internamente, mentre per $r \geq R$ si ha

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} u_r .$$

Il potenziale elettrostatico per $r \geq R$ è

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

Internamente alla sfera e sulla sua superficie il potenziale elettrostatico è costante. La richiesta di continuità di $V(r)$ implica che internamente

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} .$$

Problema 2

- 1.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{C_k} ,$$
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2} .$$

2. I due condensatori in parallelo hanno capacità equivalente

$$C_{eq}(\text{serie}) = C_1 + C_2 ,$$

per cui

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq}(\text{serie})} + \frac{1}{C_3} ,$$

cioè

$$C_{eq} = \frac{C_{eq}(\text{serie})C_3}{C_{eq}(\text{serie}) + C_3} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} .$$

Problema 3

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è

$$\Phi(t) = \int_{spira} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\mu_0}{2\pi} i(t) l \int_r^{r+l} \frac{1}{r'} dr' = \frac{\mu_0}{2\pi} i(t) l \ln \frac{r+l}{r} .$$

2. Per la legge di Faraday si ha

$$i_b(t) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 l}{2\pi R} \frac{i_0}{\tau} e^{-t/\tau} \ln \frac{r+l}{r} .$$

3. Per la legge di Felici, il modulo della carica che percorre la bobina nell'intervallo $0 < t < \infty$ è

$$q = \frac{|\Phi(\infty) - \Phi(0)|}{R} = \frac{|\Phi(0)|}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i_0 l \ln \frac{r+l}{r} ,$$

dove si è usato il fatto che $i(\infty) = 0$, per cui $\phi(\infty) = 0$.