

Compito di Fisica II
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Fisica - 16 Febbraio 2009

Problema 1

Si consideri un guscio sferico centrato in O , di raggio interno a ed esterno b , con densità di carica volumetrica $\rho = A/r$, dove r è la distanza da O e A una costante. Determinare

1. il campo elettrico $\forall r$;
2. il potenziale elettrico $\forall r$, richiedendo che questo sia nullo nell'origine;
3. campo e potenziale elettrici $\forall r$ nel caso che si aggiunga una carica puntiforme q in O ;
4. la costante A in modo tale che il campo elettrico, considerato nel punto precedente, abbia intensità costante all'interno del guscio.

Problema 2

Una spira quadrata di lato l , composta da un conduttore di sezione circolare di raggio a e resistività ρ , si trova ad una distanza h da un filo indefinito percorso da una corrente stazionaria I . Determinare

1. il campo magnetico $\vec{B}$ generato dal filo;
2. il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira;
3. la corrente indotta dovuta alla variazione di flusso attraverso la spira, supponendo che questa si allontani con velocità $v := \frac{dh}{dt}$ costante;
4. la forza che è necessario applicare alla spira affinché mantenga la velocità v . Facoltativo.

Soluzioni

Problema 1

1. Si ha

$$E(r \leq a) = 0 ,$$
$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \int_a^r \frac{r'^2}{r'} dr' = \frac{4\pi A}{2\epsilon_0} (r^2 - a^2) ,$$
$$E(a \leq r \leq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) .$$

$$E(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r^2} .$$

2. Essendo $E = 0$ per $r \leq a$, $V(r \leq a)$ deve esser costante. La richiesta $V(0) = 0$ implica che tale costante è nulla, quindi

$$V(r \leq a) = 0 .$$

Essendo $E = -\partial_r V$, si ha

$$V(a \leq r \leq b) = -\frac{A}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + c ,$$

con c una costante. Imponendo la continuità a $r = a$ (il potenziale, a differenza del campo elettrico deve esser continuo), si ha

$$0 = V(r = a) = -\frac{A}{2\epsilon_0} (a + a) + c ,$$

da cui $c = Aa/\epsilon_0$, quindi

$$V(a \leq r \leq b) = -\frac{A}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{a^2}{r} - 2a\right) .$$

Nella regione $r \geq b$ si ha

$$V(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r} + c' ,$$

con c' una costante da determinare. Imponendo la condizione di raccordo

$$-\frac{A}{2\epsilon_0} \left(b + \frac{a^2}{b} - 2a\right) = V(r = b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{b} + c' ,$$

si ottiene

$$c' = \frac{A}{\epsilon_0}(a - b) ,$$

ovvero

$$V(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r} + \frac{A}{\epsilon_0}(a - b) ,$$

3.

$$E(r \leq a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{A}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) .$$

$$E(r \geq b) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{q}{2\pi} + A(b^2 - a^2)\right) \frac{1}{r^2} .$$

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale è dato dal potenziale generato dalla carica q , pari a $q/4\pi\epsilon_0 r$, a cui è possibile aggiungere una costante arbitraria, sommato a quello calcolato nel punto 2.

4. Il termine $1/r^2$ si cancella per

$$A = \frac{q}{2\pi a^2} .$$

In tal caso

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{q}{4\pi a^2 \epsilon_0} .$$

$$E(r \geq b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{r^2} .$$

Problema 2

1. Il campo magnetico generato dal filo è

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

2. Il flusso attraverso la bobina è

$$\Phi(B) = \int_S B \cdot ndS = \int_S B dS = \int_h^{h+l} B \int_0^l dx dr = \int_h^{h+l} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h} .$$

3. La corrente indotta dalla variazione di flusso dovuto allo spostamento della spira è

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l^2 v}{2\pi R h(t)(h(t) + l)} ,$$

dove $R := \frac{4\rho l}{\pi a^2}$ è la resistenza della spira e $h(t) = h + vt$.

4. Un conduttore percorso da corrente in un campo $\vec{B}$ è soggetto alla forza (II legge di Laplace)

$$\vec{F} = -i\vec{l} \times \vec{B} .$$

Si ha $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$ (le forze sui lati delle spire perpendicolari al filo si elidono). Inoltre

$$F_2 = il \frac{\mu_0 I}{2\pi(h(t) + l)} , \quad F_4 = il \frac{\mu_0 I}{2\pi h(t)} ,$$

dove F_2 (F_4) denota la forza sui lati delle spire paralleli al filo distanti $h(t)$ ($h(t) + l$) da esso. Risulta quindi che la forza da applicare alla bobina necessaria per imprimerle una velocità v è

$$F_4 - F_2 = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 R h(t)^2 (h(t) + l)^2} .$$

Allo stesso risultato si può giungere imponendo che la potenza fornita sia uguale a quella dissipata, cioè $Fv = i^2 R$, $F := F_4 - F_2$. Si ha quindi

$$F_4 - F_2 = \frac{i^2 R}{v} ,$$

che riproduce il risultato sopra riportato.