

Problema 1

Due sfere S_1 ed S_2 , di raggio $r_1 = 2\text{cm}$ e $r_2 = 1\text{cm}$ rispettivamente, hanno ciascuna carica elettrica $q = 5 \cdot 10^{-11}\text{C}$ distribuita uniformemente su tutto il volume. I centri delle due sfere distano $d = 10\text{cm}$.

Si consideri un punto P equidistante dai centri delle due sfere e sia ancora d questa distanza. Sia inoltre Q il punto distante $d_1 = 1\text{cm}$ dal centro di S_1 e $d_2 = 11\text{cm}$ dal centro di S_2 . Si determinino

1. i valori del potenziale e del campo elettrostatici in P ;
2. il valore del campo elettrostatico in Q ;
3. l'energia elettrostatica complessiva del sistema $U = U_1 + U_2 + U_{12}$, dove U_i denota l'energia su tutto lo spazio dovuta alla carica della sfera S_i ed U_{12} l'energia d'interazione dovuta alle cariche di S_1 ed S_2 .

Problema 2

Due fili rettilinei indefiniti paralleli distanti $d = 1\text{m}$ sono percorsi in versi opposti dalle correnti di intensità $i_1 = 1\text{A}$ e $i_2 = 2\text{A}$ rispettivamente. Tra i due fili, complanarmente ad essi, vi è una spira quadrata, di lato $a = 20\text{cm}$, percorsa da una corrente di intensità i_3 .

1. Supponendo che il lato della spira più vicino al filo percorso dalla corrente i_1 sia distante da esso $d_1 = 10\text{cm}$, si calcoli il lavoro necessario per portare la spira in posizione simmetrica rispetto ai due fili.
2. Sia $R = 10^{-8}\Omega$ la resistenza della spira. Si determini la carica che circola nella spira durante lo spostamento descritto nel punto precedente.
3. Determinare in quale posizione tra i due fili si dovrebbe porre la spira affinché essa si trovi in equilibrio.

Si trascuri l'autoinduzione della spira.

Problema 3

Un filo cilindrico indefinito di raggio a , percorso da corrente I uniformemente distribuita sulla sua sezione, è circondato da una guaina cilindrica di materiale magnetico di permeabilità relativa κ e raggio esterno b .

1. Si determini il campo magnetico $\mathbf{H}$ sia internamente che esternamente al cavo.
2. Si determinino le densità superficiali di corrente che scorrono sia sulla superficie interna che quella esterna della guaina.
3. Si denoti con γ_r la circonferenza di raggio r centrata sull'asse del cavo e perpendicolare ad essa. Si consideri una particella carica che ad un certo istante si trova a distanza $r > b$ dall'asse del cavo e con velocità $\mathbf{v}$ tangente a γ_r . Si determini il campo elettrico necessario per bilanciare la forza magnetica agente sulla particella a quell'istante.

Soluzioni

Problema 1

1.

$$V_p = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d} = 8,99V .$$

Per ragioni di simmetria il contributo in P al campo elettrico è dato dalla somma delle sole componenti dei due campi che sono perpendicolari alla congiungente le due cariche. Sia O_i il centro di S_i . L'angolo α tra $\overline{PO_i}$ e la perpendicolare da P a $\overline{O_1O_2}$ è $\alpha = \arcsin \frac{d/2}{d} = \pi/6$, quindi

$$E_P = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos \alpha = 77,9V/m .$$

2. Il campo elettrico $\mathbf{E}_1$ in Q dovuto alla carica presente nella sfera di raggio d_1 concentrica ad S_1 lo si calcola applicando la legge di Gauss

$$\int_0^{d_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV ,$$

$$4\pi d_1^2 E_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi d_1^3 .$$

D'altronde $\rho = q/Vol(S_1) = 3q/4\pi r_1^3$, quindi il modulo di $\mathbf{E}_1$ risulta

$$E_1 = \frac{qd_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} .$$

Il modulo del campo elettrico $\mathbf{E}_2$ in Q dovuto alla carica presente nella sfera S_2 è

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d_2^2} .$$

Il campo elettrico totale in Q ha quindi modulo

$$E_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d_2} + \frac{d_1}{r_1^3} \right) = 599V/m ,$$

ed ha direzione e verso di $\overrightarrow{O_1Q}$.

3.

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d_1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_1} = 2,25 \cdot 10^{-10} J .$$

$$U_i = \int_V \frac{1}{2} E^2 dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_i^6} \int_0^{r_i} r^4 dr + \int_{r_i}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 r_i} .$$

quindi $U_1 = 6,74 \cdot 10^{-10} J$, $U_2 = 1,35 \cdot 10^{-9} J$ e

$$U = 2,25 \cdot 10^{-9} J .$$

Problema 2

1. Supponiamo che la corrente i_3 percorra la spira in senso orario. Supponiamo inoltre che la corrente i_1 percorra il filo in direzione discorde rispetto al verso di percorrenza che la corrente i_3 ha nel lato parallelo al filo e più vicino ad esso.

Si osservi che i due lati della spira perpendicolari ai fili sono percorsi dalla corrente in senso opposto ed inoltre sono posti alla stessa distanza dai due fili. Ne segue che la forza totale su ognuno dei due fili ha lo stesso modulo ma versi opposti, quindi la forza totale agente su questi due lati della spira è nulla.

Sia y l'asse di coordinate centrato sul filo percorso dalla corrente i_1 e perpendicolare ad esso. Si denoti con $\mathbf{j}$ il versore dell'asse y orientato in modo che $y = d$ sia il punto d'intersezione con il secondo filo.

La forza totale agente sul lato più vicino al filo percorso da i_1 è la somma delle due forze

$$\mathbf{F}_1 = \mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi d_1} \mathbf{j} , \quad \mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi(d - d_1)} \mathbf{j} .$$

Per quanto riguarda il lato opposto della spira, quello più vicino al filo percorso dalla corrente i_2 , si ha

$$\mathbf{F}_3 = -\mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi(d_1 + a)} \mathbf{j} , \quad \mathbf{F}_4 = -\mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi(d - d_1 - a)} \mathbf{j} .$$

La forza totale agente sulla spira è quindi

$$\mathbf{F}(d_1) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i = \mu_0 \frac{i_3 a}{2\pi} \left(\frac{i_1}{d_1} - \frac{i_1}{d_1 + a} + \frac{i_2}{d - d_1} - \frac{i_2}{d - d_1 - a} \right) = ? ,$$

ed il lavoro necessario per portare la spira nella posizione di equidistanza tra i due fili è

$$L = F \frac{d - a - 2d_1}{2} = ? .$$

2. Sia $\Phi(\mathbf{B}_1)$ il flusso del campo magnetico totale attraverso la spira nella sua posizione iniziale e $\Phi(\mathbf{B}_2)$ quello che attraversa la spira quando è equidistante dai due fili. Si ha

$$\Phi(\mathbf{B}_1) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left(-i_1 \ln \frac{d_1 + a}{d_1} + i_2 \ln \frac{d - d_1}{d - d_1 - a} \right) = ? ,$$

$$\Phi(\mathbf{B}_2) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left(-i_1 \ln \frac{d + a}{d - a} + i_2 \ln \frac{d - a}{d + a} \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} (i_2 + i_1) \ln \frac{d - a}{d + a} = ? ,$$

e per la legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi(\mathbf{B}_1) - \Phi(\mathbf{B}_2)}{R} = ? .$$

3. La forza esercitata dalla spira in un punto generico ha ovviamente la stessa forma di $\mathbf{F}(d_1)$, dove adesso la distanza d_1 è intesa variabile. La posizione di equilibrio è quindi il valore di y soluzione di $\mathbf{F}(y) = 0$, ovvero

$$y^2(i_1 - i_2) + y[i_1(a - 2d) - i_2 a] + i_1 d(d - a) = 0 ,$$

ovvero $y_1 = 0,32m$ e $y_2 = -2,52m$. La posizione d'equilibrio della spira corrispondente a quella situata tra i due fili risulta quindi

$$y_1 = 0,32m .$$

Problema 3

1. Il campo $\mathbf{H}$ ha linee di flusso circolari centrate sull'asse del cavo. Per la legge di Ampère $\oint_{\gamma_r} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I(r)$. Si ha

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I(r)}{2\pi r} \mathbf{u} ,$$

dove $\mathbf{u}$ è il versore tangente a γ_r nel punto $\mathbf{r}$ ed il cui verso dipende dalla scelta della direzione della corrente I .

$$I(r < a) = Ir^2/a^2 , \quad I(r \geq a) = I .$$

Quindi

$$\mathbf{H}(r < a) = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{u} , \quad \mathbf{H}(r \geq a) = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u} .$$

2. Ricordando che

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} ,$$

ed essendo $\mathbf{B} = \mu_0 \kappa \mathbf{H}$, si ha

$$\mathbf{M} = (\kappa - 1) \mathbf{H} .$$

La densità superficiale di corrente è data da $\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$, con $\mathbf{u}_n$ il versore normale alla superficie orientata verso l'esterno. La densità superficiale di corrente che scorre sulla superficie esterna è

$$\mathbf{j}_{s,e} = I \frac{\kappa - 1}{2\pi b} \mathbf{u} \times \mathbf{u}_n = I \frac{\kappa - 1}{2\pi b} \mathbf{u}_z ,$$

dove $\mathbf{u}_z$ è il versore lungo l'asse del cavo orientato nel verso opposto della corrente.

La densità superficiale di corrente che scorre sulla superficie interna è

$$\mathbf{j}_{s,i} = -I \frac{\kappa - 1}{2\pi a} \mathbf{u} \times \mathbf{u}_n = -I \frac{\kappa - 1}{2\pi a} \mathbf{u}_z .$$

3. Poiché la direzione del campo è parallela a $\mathbf{v}$, la forza agente sulla particella dovuta al campo magnetico è nulla. Ne segue che il campo elettrico richiesto è nullo.