

**Compito di Fisica II**  
**Chimica e Chimica Industriale**  
**Padova - Dipartimento di Fisica - 12 Settembre 2011**

**Problema 1**

Una sfera solida isolante è carica con densità costante  $\rho$ . Si denoti con  $\vec{r}$  il vettore dal centro della sfera ad un punto  $P$  interno alla sfera.

1. Si determini il valore del campo elettrico in  $P$ ;
2. si supponga che dalla sfera sia sottratta una cavità sferica di raggio  $\vec{r}'$ . Sia  $\vec{a}$  il vettore che collega il centro della sfera con quello della cavità. Si determini il campo elettrico all'interno della cavità.

**Problema 2**

Due fili rettilinei indefiniti paralleli distanti  $d = 1m$  sono percorsi in versi opposti dalle correnti di intensità  $i_1 = 1A$  e  $i_2 = 2A$  rispettivamente. Tra i due fili, complanarmente ad essi, vi è una spira quadrata, di lato  $a = 20cm$ , percorsa da una corrente di intensità  $i_3$ .

1. Supponendo che il lato della spira più vicino al filo percorso dalla corrente  $i_1$  sia distante da esso  $d_1 = 10cm$ , si calcoli la forza totale agente sulla spira.
2. Sia  $R = 10^{-8}\Omega$  la resistenza della spira. Si determini la carica che circola nella spira durante lo spostamento dalla posizione descritta a quella in cui la spira si trova in posizione simmetrica rispetto ai due fili.
3. Determinare in quale posizione tra i due fili si dovrebbe porre la spira affinché essa si trovi in equilibrio.

## Problema 1

Dalla legge di Gauss segue  $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3$ ,  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$ . Consideriamo prima un punto  $P$  sulla superficie sferica della cavità e denotiamo con  $\vec{r}$  il raggio dal centro della sfera grande a  $P$ . Grazie al principio di sovrapposizione il campo elettrico nel punto  $P$  prima della rimozione della sfera è dato dalla somma del termine  $E'$  relativo alle cariche nella sfera più piccola e da  $E''$ , il campo relativo alle cariche esterne. Quest'ultimo è il valore del campo richiesto.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{a} + \vec{r}') = \vec{E}'(\vec{r}') + \vec{E}'' ,$$

dove  $\vec{r}'$  denota il raggio dal centro della piccola sfera al bordo (dove si considera il punto  $P$ ). La legge di Gauss implica

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}' , \quad \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}' + \vec{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}' + \vec{E}'' , \quad \vec{E}'' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} ,$$

che è indipendente sia dal raggio della cavità che della sfera isolante. È immediato dedurre che il campo elettrico all'interno della cavità è lo stesso che nel punto  $P$ . Si può infatti immaginare di calcolare prima il campo sulla superficie sferica di una cavità di raggio più piccolo e poi calcolare la variazione del campo elettrico dovuta alla rimozione della calotta sferica tale da ottenere la stessa cavità sferica originaria. Come segue dal principio di sovrapposizione e dalla legge di Gauss tale variazione sarebbe nulla.

## Problema 2

1. Supponiamo che la corrente  $i_3$  percorra la spira in senso orario. Supponiamo inoltre che la corrente  $i_1$  percorra il filo in direzione discorde rispetto al verso di percorrenza che la corrente  $i_3$  ha nel lato parallelo al filo e più vicino ad esso.

Si osservi che i due lati della spira perpendicolari ai fili sono percorsi dalla corrente in senso opposto ed inoltre sono posti alla stessa distanza dai due fili. Ne segue che la forza totale su ognuno dei due fili ha lo stesso modulo ma versi opposti, quindi la forza totale agente su questi due lati della spira è nulla.

Sia  $y$  l'asse di coordinate centrato sul filo percorso dalla corrente  $i_1$  e perpendicolare ad esso. Si denoti con  $\mathbf{j}$  il versore dell'asse  $y$  orientato in modo che  $y = d$  sia il punto d'intersezione con il secondo filo.

La forza totale agente sul lato più vicino al filo percorso da  $i_1$  è la somma delle due forze

$$\mathbf{F}_1 = \mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi d_1} \mathbf{j} , \quad \mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi (d - d_1)} \mathbf{j} .$$

Per quanto riguarda il lato opposto della spira, quello più vicino al filo percorso dalla corrente  $i_2$ , si ha

$$\mathbf{F}_3 = -\mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi(d_1 + a)} \mathbf{j} , \quad \mathbf{F}_4 = -\mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi(d - d_1 - a)} \mathbf{j} .$$

La forza totale agente sulla spira è quindi

$$\mathbf{F}(d_1) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i = \mu_0 \frac{i_3 a}{2\pi} \left( \frac{i_1}{d_1} - \frac{i_1}{d_1 + a} + \frac{i_2}{d - d_1} - \frac{i_2}{d - d_1 - a} \right) =? .$$

2. Sia  $\Phi_1(\mathbf{B})$  il flusso del campo magnetico totale attraverso la spira nella sua posizione iniziale e  $\Phi_2(\mathbf{B})$  quello che attraversa la spira quando è equidistante dai due fili. Si ha

$$\Phi_1(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( -i_1 \ln \frac{d_1 + a}{d_1} - i_2 \ln \frac{d - d_1}{d - d_1 - a} \right) =? ,$$

$$\Phi_2(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( -i_1 \ln \frac{d + a}{d - a} + i_2 \ln \frac{d - a}{d + a} \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} (i_2 + i_1) \ln \frac{d - a}{d + a} =? ,$$

e per la legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}) - \Phi_2(\mathbf{B})}{R} =? .$$

3. La forza esercitata dalla spira in un punto generico ha ovviamente la stessa forma di  $\mathbf{F}(d_1)$ , dove adesso la distanza  $d_1$  è intesa variabile. La posizione di equilibrio è quindi il valore di  $y$  soluzione di  $\mathbf{F}(y) = 0$ , ovvero

$$y^2(i_1 - i_2) + y[i_1(a - 2d) - i_2 a] + i_1 d(d - a) = 0 ,$$

ovvero  $y_1 = 0,32m$  e  $y_2 = -2,52m$ . La posizione d'equilibrio della spira corrispondente a quella situata tra i due fili risulta quindi

$$y_1 = 0,32m .$$