

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 5 Maggio 2025**

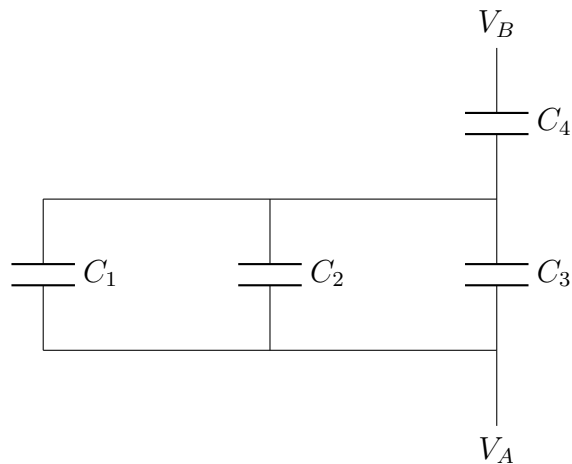
Problema 1

Si consideri la distribuzione di carica volumetrica $\rho(r \leq R) = Ar^2$, $\rho(r > R) = 0$, dove A è una costante e r il modulo del raggio vettore. Determinare

1. la carica $q(r)$ racchiusa dalla sfera di raggio $r \in [0, \infty)$,
2. il campo elettrostatico in tutto $\mathbb{R}^3$,
3. il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto $\mathbb{R}^3$ tale che $V(R) = 0$.

Problema 2

Calcolare la capacità equivalente del seguente circuito, dove $V_A \neq V_B$.



Domanda: si descriva la legge di Gauss.

Problema 1

1.

$$q(r \leq R) = \int_{V_r} \rho d\tau = 4\pi A \int_0^r r'^4 dr' = \frac{4}{5}\pi A r^5, \quad q(r \geq R) = \frac{4}{5}\pi A R^5.$$

2.

$$\int_{S_r^2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E(r),$$

da cui segue

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{Ar^3}{5\epsilon_0}, \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r^2}.$$

3.

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}',$$

da cui, ponendo come richiesto $V(R) = 0$, si ha

$$V(r \leq R) = - \int_R^r \frac{Ar'^3}{5\epsilon_0} dr' = - \frac{A}{20\epsilon_0} (r^4 - R^4),$$

$$V(r \geq R) = - \int_R^r \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{A}{5\epsilon_0} R^5 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

È istruttivo mostrare come i precedenti risultati si possano ricavare usando la versione differenziale della legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Iniziamo con l'analisi nella regione $r \leq R$. Poiché nel caso conservativo $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, si ha

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

dove

$$\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

è il laplaciano. Poiché V dipende solo da r , nel caso in esame, si ha

$$\Delta V = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) V ,$$

e l'equazione per V si riduce a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) V = -\frac{A}{\epsilon_0} r^2 ,$$

la cui soluzione è

$$V(r) = -\frac{A}{20\epsilon_0} r^4 + C ,$$

con C una costante, che, richiedendo $V(R) = 0$, risulta

$$C = \frac{A\epsilon_0}{20} R^4 ,$$

da cui

$$V(r) = \frac{A}{20\epsilon_0} (R^4 - r^4) .$$

Da questo risultato si ricava anche $\vec{E}$. Per questo utilizziamo il fatto che in coordinate sferiche la divergenza che agisce su di un vettore che dipende solo da r , risulta semplicemente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) = \frac{A}{\epsilon_0} r^2 ,$$

da cui segue

$$\vec{E}(r) = \frac{Ar^3}{5\epsilon_0} \vec{u}_r .$$

Si noti che, lo stesso risultato lo si ottiene utilizzando

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} V(r) \vec{u}_r .$$

La precedente procedura si può estendere alla regione $r \geq R$, dove

$$\Delta V(r) = 0 , \quad r \geq R ,$$

che in coordinate sferiche diventa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) V = 0 ,$$

la cui soluzione è

$$V(r) = \frac{B}{r} + C ,$$

con B e C fissate dalla condizioone di raccordo con $V(r \leq R)$ nel punto $r = R$. Questo riproduce il risultato ottenuto precedentemente. Per approfondimenti sull'equazione di Laplace si veda, per esempio, l'Eq.(44) di <https://www2.pd.infn.it/matone/DistribuzioniEFourier.pdf>

Problema 2

$$C_{eq,par} = C_1 + C_2 + C_3 , \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{eq,par}} , \quad C_{eq} = \frac{C_4(C_1 + C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} .$$