

L'ENTROPIA DI KOLMOGOROV-SINAI

Seminario studenti
Stefano Pasquali
29 aprile 2013

Contents

1	Introduzione	2
2	Entropia di una Partizione	2
3	Entropia di un sistema dinamico	6
4	K-sistemi	15

Sommario

Una nozione che emerge nello studio dei Sistemi Dinamici è quella di entropia. Questa nozione deve essere inserita in un contesto più ampio, come quello della Teoria Ergodica, in cui si vuole dare una spiegazione dettagliata e matematicamente rigorosa dei metodi usati in Meccanica Statistica.

Il compito della Meccanica Statistica è quello di dedurre proprietà **macroscopiche** di sistemi a molti gradi di libertà (es. temperatura ed entropia nei gas) a partire dalla sola conoscenza della dinamica **microscopica** (es. hamiltoniana del sistema).

Una nozione importante in Meccanica Statistica è quella di entropia di un sistema fisico. Il significato dell'entropia come "indice del grado di disordine" di un sistema è ben noto sin dalla Termodinamica.

Ciò che si farà nel seguito è spiegare che la nozione di entropia può essere formalizzata, introducendo l'**entropia di Kolmogorov-Sinai** e usata in un contesto più ampio nello studio di sistemi dinamici generici (e dunque apparentemente non collegati alla termodinamica).

1 Introduzione

- Nel seguito della spiegazione, quando parleremo di “misura” intenderemo “misura di probabilità”. Assumeremo inoltre che gli spazi di probabilità $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$ di cui parleremo siano **completi** (ie, che tutti gli insiemi di misura nulla appartengano alla σ -algebra σ_Ω).
- Infine, quando diremo che una relazione sarà valida **mod 0** intenderemo che la relazione sarà valida a meno di un insieme di misura nulla.

Definizione 1.1. Dato un insieme Ω consideriamo un gruppo 1-parametrico $\{\Phi^t\}_t$ (discreto se $t \in \mathbb{Z}$, continuo se $t \in \mathbb{R}$) di endomorfismi di Ω , ie

$$\begin{aligned}\Phi^t : \Omega &\rightarrow \Omega, \quad \forall t \\ \Phi^{t_1} \circ \Phi^{t_2} &= \Phi^{t_1+t_2}, \quad \forall t_1, t_2.\end{aligned}$$

Una misura $\mu : \sigma_\Omega \rightarrow [0, 1]$ si dice **invariante** rispetto a $\{\Phi^t\}_t$, se

$$\mu(\Phi^{-t}(A)) = \mu(A), \quad \forall A \subseteq \Omega,$$

dove $\Phi^{-t}(A) := \{x \in \Omega : \Phi^t(x) \in A\}$.

Definizione 1.2. Dati un insieme Ω , un gruppo 1-parametrico di trasformazioni $\{\Phi^t\}_t$ e una misura invariante μ su Ω , la tripletta (Ω, Φ^t, μ) si dice **sistema dinamico (misurabile)**.

2 Entropia di una Partizione

Definizione 2.1. Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$, e si assuma che (Ω, Φ^t, μ) sia un SD (sistema dinamico) discreto. Allora una **partizione** di Ω (mod 0) è un insieme $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}$ t.c.

- $\bigcup_{i=1}^r C_i = \Omega$ (mod 0)
- $C_i \cap C_j = \emptyset$ per $i \neq j, 1 \leq i, j \leq r$.

Data una partizione ξ definiamo per quasi-ogni (nel senso della misura) $x \in \Omega$ la **storia** di x come la stringa $\sigma(x) = (\sigma_t(x))_{t \in \mathbb{Z}}$, dove

$$\sigma_t(x) = i \in \{1, \dots, r\}$$

se $\Phi^t(x) \in C_i$.

Definizione 2.2. Una partizione ξ di uno spazio di prob. (Ω, Φ^t, μ) è detta **separante** se punti differenti hanno storie differenti, ie se $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y \forall x, y \in \Omega$.

Definizione 2.3. Un SD topologico $(\Omega$ sp. metrico T2 completo, Φ^t omeomorfismo $\forall t$) è detto **espansivo** se

$\exists \epsilon > 0$ t.c. $\forall x, y \in \Omega$ che soddisfa $d(\Phi^t(x), \Phi^y(y)) < \epsilon \forall t \in \mathbb{Z}$ si abbia $x = y$.

Ogni SD topologico espansivo ammette partizioni separanti (scegliere C_i con $\text{diam}(C_i) < \epsilon \forall i$).

Remark. Gli Automorfismi Iperbolici su $\mathbb{T}^n$ sono espansivi Si ricordi che un automorfismo su $\mathbb{T}^n$ è della forma $\varphi \mapsto A\varphi$, con $A \in SL_n(\mathbb{Z})$.

Inoltre si ricordi che una matrice si dice **iperbolica** se tutti i suoi autovalori hanno modulo diverso da 1.

Un famoso esempio di automorfismo iperbolico su $\mathbb{T}^2$ è il “Gatto di Arnol’d”,

dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Per oss. prec. il sistema $(\mathbb{T}^n, A^t, \mu_T)$ ammette una partizione separante.

Definition 2.4. L’entropia di una partizione ξ del SD (Ω, Φ^t, μ) è data da

$$H(\xi) := - \sum_{i=1}^r \mu(C_i) \log \mu(C_i).$$

Se $\mu(C_i) = 0$ poniamo per convenzione $\mu(C_i) \log \mu(C_i) = 0$.

Remark. • $H(\xi) \in [0, \log(r)] \forall \xi = \{C_1, \dots, C_r\}$.

$H(\xi) = 0 \iff \exists i \in \{1, \dots, r\}$ s.t. $\mu(C_i) = 1$ (**esiste un esito quasi**

certo),

$H(\xi) = \log(r) \iff \mu(C_i) = 1/r \forall i = 1, \dots, r$ (**equiprobabilità degli**

esiti).

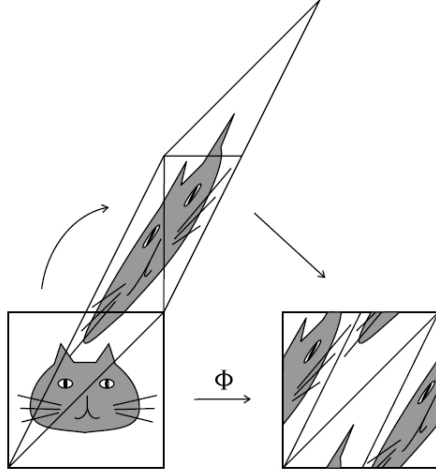


Figure 1: Mappa del Gatto di Arnol'd

- Se $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}, \eta = \{D_1, \dots, D_r\}$ sono partizioni, si ha

$$H(\xi \vee \eta) \leq H(\xi) + H(\eta)$$

dove $\xi \vee \eta$ è la partizione generata da ξ e da η .

L'uguaglianza si ha $\iff \xi, \eta$ sono indipendenti (ie $\mu(C_i \cap D_j) = \mu(C_i)\mu(D_j) \forall i, j$).

- Se $\xi \leq \eta$ (ie $\forall j \exists i$ s.t. $\mu(C_i \cap D_j) = \mu(D_j)$) allora $H(\xi) \leq H(\eta)$.

L'entropia di una partizione corrisponde alla definizione dell'**entropia microscopica** data da Boltzmann.

Nel seguito denoteremo con $\epsilon := \bigcup_{x \in \Omega} \{x\}$ la più grande partizione rispetto alla relazione $\leq$.

Definizione 2.5. Siano $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}$ e $\eta = \{D_1, \dots, D_r\}$ due partizioni di $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$, dove $\mu(D_j) > 0 \forall j$.

Si definisce l'**entropia condizionata** di ξ rispetto a η come

$$H(\xi|\eta) := - \sum_{j=1}^r \mu(D_j) \sum_{i=1}^r \mu(C_i|D_j) \log \mu(C_i|D_j).$$

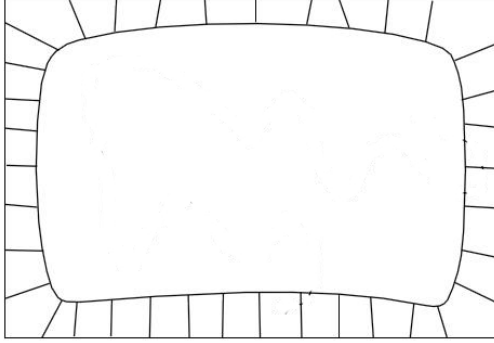


Figure 2: divisione dello spazio di particella singola in cellette, ad opera di Boltzmann

Osservazione. • $\forall \xi_1, \xi_2, \eta$ partizioni si ha che

$$H(\xi_1 \vee \xi_2) = H(\xi_2) + H(\xi_1|\xi_2),$$

$$H(\xi_1|\xi_2) = H(\xi_1 \vee \xi_2) - H(\xi_2),$$

$$H(\xi_1 \vee \xi_2|\eta) \leq H(\xi_1|\eta) + H(\xi_2|\eta).$$

• $\forall \xi, \eta_1, \eta_2$ partizioni si ha che

$$H(\xi|\eta_1 \vee \eta_2) \leq H(\xi|\eta_1),$$

$$H(\xi|\eta_1 \vee \eta_2) \leq H(\xi|\eta_2),$$

Proposition 2.1. • Se $\eta_2 \leq \eta_1 \pmod{0}$ allora $\forall \xi H(\xi|\eta_1) \leq H(\xi|\eta_2)$.

• Se $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots$ e $\xi = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \xi_n$ allora $\forall \eta$

$$H(\xi|\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi_n|\eta).$$

• Se $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots$, $H(\xi_m|\eta) < +\infty$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ e $\xi = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n$ allora

$$H(\xi|\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi_n|\eta).$$

- Se $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots$ e $\eta = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ allora $\forall \xi$

$$H(\xi|\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi|\eta_n).$$

- Se $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots$, $H(\xi|\eta_m) < +\infty$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ e $\eta = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ allora

$$H(\xi|\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi|\eta_n).$$

- Se $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ è un endomorfismo $H(\Phi^{-1}\xi|\Phi^{-1}\eta) = H(\xi|\eta)$.

3 Entropia di un sistema dinamico

Ora che abbiamo definito l'entropia per una partizione, possiamo passare al passo successivo, cioè quello di definire l'entropia per un sistema dinamico (misurabile) qualunque.

Ricordiamo che se $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}$ è una partizione di Ω ,

$$\Phi^t(\xi) = \{\Phi^t(C_1), \dots, \Phi^t(C_r)\}$$

$\forall t \in \mathbb{Z}$.

Si può inoltre dimostrare che l'insieme

$$Z := \{\xi \subset \sigma_\Omega : \xi \text{ è partizione, } H(\xi) < +\infty\}$$

dotato della distanza $d(\xi, \eta) := H(\xi|\eta) + H(\eta|\xi)$ è uno spazio di Banach.

Definizione 3.1. L'entropia del SD (Ω, Φ^t, μ) rispetto alla partizione ξ è data da

$$h(\Phi, \xi) := H(\xi | \bigvee_{t=1}^{\infty} \Phi^{-t} \xi).$$

Proposizione 3.1. • $h(\Phi, \xi) \leq H(\xi)$;

- $h(\Phi, \xi_1 \vee \xi_2) \leq h(\Phi, \xi_1) + h(\Phi, \xi_2)$;

- se $H(\xi) < +\infty$ allora

$$h(\Phi, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee \dots \vee \Phi^{-(n-1)} \xi);$$

cioè, se interpretiamo la quantità $H(\xi \vee \dots \vee \Phi^{-(n-1)} \xi)$ come l'informazione ottenuta da n misure della stessa quantità, allora **l'entropia è l'informazione media prodotta da una singola misura**;

- $h(\Phi^n, \bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi) = n \ h(\Phi, \xi)$;
- $h(\Phi, \xi) = h(\Phi^{-1}, \xi)$;
- $h(\Phi, \cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ è continua;
- if $\xi_1, \xi_2 \in Z$ and $\xi_1 \leq \xi_2$, then $h(\Phi, \xi_1) \leq h(\Phi, \xi_2)$.

In realtà si può dimostrare un risultato più forte sull'entropia, e che la lega alla Teoria Ergodica. Ricordiamo che

Definizione 3.2. Un SD è detto **ergodico** se non ammette costanti del moto non banali di classe L^1 , cioè
se $f \in L^1(\Omega, \mu)$ soddisfa $f(\Phi^t(x)) = f(x) \ \forall t, \mu$ -q.c. in Ω , allora f è q.c.-costante in Ω .

Teorema (Shannon, Mc Millan, Breiman) 3.1. Sia (Ω, Φ, μ) SD discreto, e sia ξ una partizione **finita** di Ω .

Se $C^{(n)}(x)$ l'elemento della partizione $\bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi$ che contiene $x \in \Omega$, allora:

- per quasi ogni $x \in \Omega$ ben definita

$$g(\Phi, \xi, x) := \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t} \log \mu(C^{(t)}(x));$$

- $h(\Phi, \xi) = \int_{\Omega} g(\Phi, \xi, \mu) d\mu(x)$;
- se il SD è ergodico, allora per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha che

$$g(\Phi, \xi, x) = h(\Phi, \xi).$$

Possiamo dare infine la seguente:

Definizione 3.3. L'entropia di Kolmogorov-Sinai (K-S) del SD (Ω, Φ, μ) è data da

$$h(\Phi) := \sup_{\xi \in Z} h(\Phi, \xi).$$

Teorema 3.2 (Kouchnirenko). Si supponga che:

- Ω sia una varietà compatta;
- μ ammetta una densità di classe C^1 rispetto alla misura di Lebesgue;
- Φ^t sia un diffeomorfismo $\forall t$.

Allora il SD (Ω, Φ, μ) ha entropia K-S **finita**.

Osservazione. Se $\dim \Omega = N$, $\lambda = \sup_{x \in \Omega} \|D\Phi(x)\|$, si può mostrare che

$$h(\Phi) \leq N \log(\lambda).$$

Esempio. Gatto di Arnol'd

Per questo sistema la stima dell'entropia porge

$$h(A) \leq 2 \log(\lambda_{\max}),$$

dove $\lambda_{\max} = \max \text{Spec}(A) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Il risultato esatto (lo vedremo in seguito) è

$$h(A) = \log(\lambda_{\max}).$$

Per evidenziare l'importanza dell'entropia all'interno della Teoria Ergodica bisogna introdurre una relazione di isomorfismo tra SD. Questo permette, al solito, di studiare SD a meno di isomorfismo, considerando equivalenti SD isomorfi.

Definizione 3.4. I SD (M, Φ, μ) e (N, Ψ, ν) si dicono **isomorfi** se $\exists f : M \rightarrow N$ invertibile (mod 0) t.c.

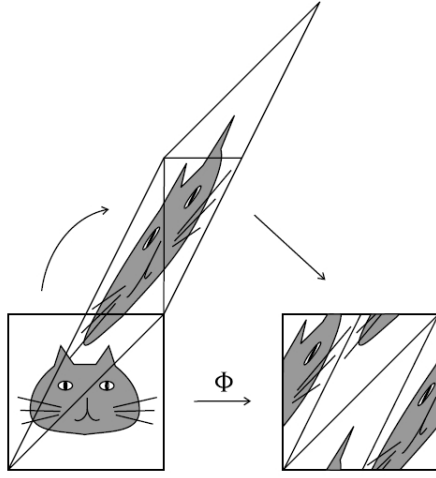


Figure 3: Mappa del Gatto di Arnol'd

- preserva le misure,

$$\begin{aligned} \nu(f(A)) &= \mu(A), \\ \mu(f^{-1}(A)) &= \nu(A); \end{aligned}$$

- commuta con i flussi, $\Psi^t \circ f = f \circ \Phi^t \forall t$.

Proposizione 3.2. • Se $(\Omega_1, \Phi_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \Phi_2, \mu_2)$ sono SD isomorfi, allora

$$h(\Phi_1) = h(\Phi_2);$$

- se $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots, \bigvee_n \xi_n = \epsilon$ allora

$$h(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\Phi, \xi_n);$$

- $h(\Phi^n) = |n| h(\Phi) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Ora si mostrerà come calcolare l'entropia in alcuni SD.

Esempio. Automorfismi Periodici

Sia Φ automorfismo di periodo $m \in \mathbb{N}$, allora $\forall \xi = \{C_1, \dots, C_r\}$ si ha che

$$\text{Card}\left(\bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi\right) \leq r^m;$$

$$H\left(\bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi\right) \leq m \log(r);$$

$$h(\Phi, \xi) = \lim_n \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi\right) \leq 0$$

In generale, se vogliamo realmente calcolare $h(\Phi)$ non possiamo sfruttare direttamente la definizione. Fortunatamente basta introdurre la seguente

Definizione 3.5. Una partizione ξ è detta **generante** per Φ se $\bigvee_{t \in \mathbb{N}} \Phi^{-t} \xi = \epsilon$.

Teorema 3.3. Se $\xi \in \mathcal{Z}$ è partizione generante per Φ , allora $h(\Phi) = h(\Phi, \xi)$.

Dunque per calcolare l'entropia basta trovare una partizione generante per il SD dato.

Esempio. Rotazioni su $\mathbb{S}^1$ Se si considerano rotazioni di angolo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora la partizione

$$\xi = \{[0, 1/2[, [1/2, 1]\}$$

è generante. Dato che

$$\text{Card}\left(\bigvee_{t=0}^{n-1} \Phi^{-t} \xi\right) = 2n,$$

$$h(\Phi) = h(\Phi, \xi) \leq \lim_n \frac{\log(2n)}{n} = 0.$$

Esempio. Sistemi Integrabili Hamiltoniani I sistemi integrabili sono (isomorfi a) moti lineari su tori, che generalizzano il caso precedente. Vale dunque

$$h(\Phi) = 0.$$

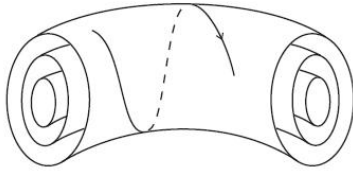


Figure 4: Moto lineare su $\mathbb{T}^2$

Esempio. Automorfismi Iperbolici su $\mathbb{T}^n$
Si può dimostrare che

$$h(\Phi) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log(|\lambda_i|),$$

dove $\lambda_i \in \text{Spec}(A) \forall i$. Per il Gatto di Arnol'd si ha $h(A) = \log(\lambda_{\max})$.

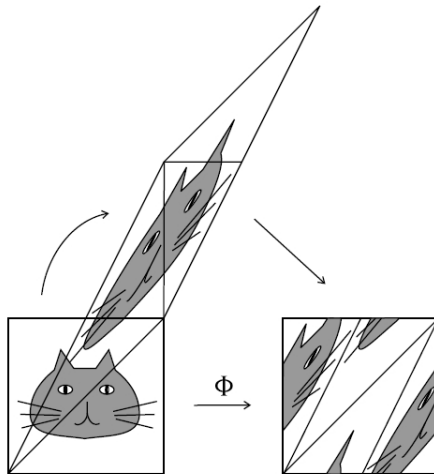


Figure 5: Mappa del Gatto di Arnol'd

Esempio. Automorfismi di Bernoulli Questa è una classe molto importante di SD. Si consideri uno sp. prob. discreto $(Y = \{y_1, \dots, y_r\}, \nu)$, dove $\nu(\{y_i\}) = p_i \forall i$. Ora si ponga

$$\Omega := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in Y \forall i\}$$

con la σ -algebra generata dai **cilindri**

$$C_l^k := \{x \in \Omega | x_k = y_l\}$$

dove $\mu(C_k^l) = p_l$. In questo caso l'automorfismo, detto **shift**, è definito da

$$x' = \Phi(x)$$

dove $x'_k = x_{k+1}$.

L'idea è quella di guardare ad un numero infinito di lanci di un dado ad r facce, considerando p_i come la prob. a priori dell' i -esimo valore, considerando il cilindro C_l^k come l'insieme delle sequenze in cui il k -esimo risultato sia y_l , e dove poniamo (è solo un'ipotesi, ma è verosimile per un dado) che la prob. di ottenere y_l al k -esimo lancio dipenda solo da l .



Si può mostrare che la partizione $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}$ con $C_k := \{x \in \Omega : x_0 = a_k\}$ è generante. Perciò

$$h(\Phi) = h(\Phi, \xi) = \lim_n \frac{1}{n} H(\xi \vee \dots \vee \Phi^{-(n-1)} \xi)$$

$$\stackrel{\text{indip.}}{=} \lim_n \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} H(\Phi^{-t} \xi)$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} nH(\xi) = H(\xi) = - \sum_{k=1}^r p_k \log(p_k).$$

Sappiamo che SD isomorfi hanno la stessa entropia, ma il viceversa non vale in generale (SD integrabili con numeri differenti di gradi di libertà non sono isomorfi, ma hanno tutti entropia nulla). Gli Automorfismi di Bernoulli rappresentano un'eccezione, poiché Ornstein nel 1970 ha dimostrato che due Automorfismi di Bernoulli con la stessa entropia sono **necessariamente** isomorfi.

Esiste un modo più empirico per calcolare l'entropia K-S.
Bisogna sfruttare i cosiddetti ECL, o **Esponenti caratteristici di Lyapunov**.

Definizione 3.6. Sia (Ω, Φ, μ) SD topologico, e si fissino $x \in \Omega$, $v \in T_x \Omega$.
L'**esponente caratteristico di Lyapunov** (o ECL) di v nel punto x è la quantità

$$\chi(x, v) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|D\Phi^t(x) v\|}{\|v\|}.$$

Gli ECL sono interpretati come quantità che descrivono la divergenza esponenziale di orbite vicine.

Infatti, fissato $x \in \Omega$ e presa una curva $y(\cdot)$ t.c. $y(0) = x$ e $\dot{y}(0) = v$, si ha che

$$\gamma := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\Phi^t(y(s)), \Phi^t(x))}{d(y(s), x)} \sim \frac{\|D\Phi^t v\|}{\|v\|} \sim e^{\chi(x, v)t}$$

Osservazione. Gli ECL presentano alcuni vantaggi e svantaggi.

Pro:

- quantità facilmente interpretabili;
- quantità calcolabili numericamente.

Contro:

- sono limiti, e il calcolo andrà fermato dopo un certo tempo;
- sono medie temporali, per alcuni SD bisogna simulare la dinamica del sist. per tempi lunghi.

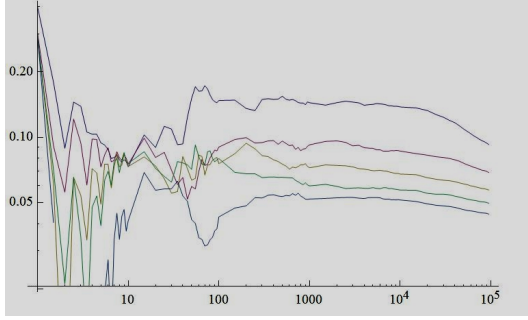


Figure 6: Grafico dei primi 5 ECL di un sistema hamiltoniano a 32 gradi di libertà

Proposizione 3.3. Per ogni $x \in \Omega$ fissato

- al variare di $v \in T_x\Omega$ l'ECL $\chi(x, v)$ assume $m \leq N$ valori distinti

$$\chi_1(x) > \chi_2(x) > \dots > \chi_m(x);$$

- esiste una filtrazione di $T_x\Omega$ in m sottospazi

$$T_x\Omega := L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_m,$$

$$\text{t.c. } v \in L_i \setminus L_{i+1} \Rightarrow \chi(x, v) = \chi_i(x), \forall i = 1, \dots, m;$$

- per quasi ogni $v \in T_x\Omega$ si ha che $\chi(x, v) = \chi_1(x)$.

Si può studiare la dipendenza degli ECL dal punto $x \in \Omega$.

Proposizione [Oseledec] 3.4. Se Ω è varietà riemanniana e Φ è diffeomorfismo si può mostrare che lo spettro di Lyapunov

$$\text{Spec}(x) := \{\chi_1(x), \chi_2(x), \dots, \chi_m(x)\}$$

è una funzione misurabile di $x \in \Omega$.

- gli ECL sono costanti del moto, $\chi_i(x) = \chi_i(\Phi^t(x)) \forall t, \forall i = 1, \dots, m;$
- se (Ω, Φ, μ) è SD *ergodico*, gli ECL sono q.c. costanti.

$$\chi_i(x) = \chi_i$$

per quasi ogni $x \in \Omega, \forall i$.

Ora si vedranno alcuni esempi di calcolo degli ECL.

Esempio. Sistemi Hamiltoniani Se il sist. ha n gradi di libertà e $\Omega = \{H = e\}$ ($\dim \Omega = 2n-1$) allora

$$Spec(x) = \{\chi_1(x), \dots, \chi_{n-1}(x), \chi_n(x), -\chi_{n-1}(x), \dots, -\chi_1(x)\}.$$

Se il sist. ha n gradi di libertà e $\Omega = \{e_1 \leq H \leq e_2\}$ ($\dim \Omega = 2n$) allora

$$Spec(x) = \{\chi_1(x), \dots, \chi_n(x), -\chi_n(x), \dots, -\chi_1(x)\}.$$

Esempio. SD Hamiltoniani Integrabili Se il sist. ha n gradi di libertà e $\Omega = \{e_1 \leq H \leq e_2\}$ ($\dim \Omega = 2n$) allora

$$Spec(x) = \{0, \dots, 0\}.$$

Il seguente Teorema permette di collegare calcolo degli ECL e calcolo dell'Entropia K-S.

Teorema [Pesin, 1975] 3.4. • Se Ω è varietà compatta e Φ è diffeomorfismo si può mostrare che

$$h(\Phi) = \int_{\Omega} \sum_i \chi_i^+(x) d\mu(x).$$

- Se inoltre il SD è *ergodico*, allora $h(\Phi) = \sum_i \chi_i^+$.

4 K-sistemi

In questa sezione descriveremo una classe importante di SD, detti **SD K-mescolanti** (o semplicemente **K-sistemi**), mostrandone il legame con l'entropia K-S. Mostreremo che i SD K-mescolanti sono ergodici (in realtà la proprietà di K-mixing è molto più forte dell'ergodicità), e che gli Automorfismi di Bernoulli sono K-sistemi.

Definizione 4.1. Un SD (Ω, Φ, μ) è detto **K-sistema** se $\exists G \subset \sigma_\Omega$ t.c.

- $G \subset \Phi(G)$;
- $\bigvee_{t \in \mathbb{Z}} \Phi^t(G) = \sigma_\Omega$;
- $\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} \Phi^t(G) = R$
dove R è la σ -algebra costituita dagli insiemi di misura 0 e 1.

Osservazione. Una partizione ξ_G che genera la σ -algebra G è detta **K-partizione**. Il nome “K-sistema” è stato dato per ricordare Kolmogorov, dato che si può

dimostrare che i K-sistemi soddisfano la **Legge 0-1** di Kolmogorov (la terza proprietà nella definizione precedente ricorda molto l’enunciato della Legge 0-1).

Ora passiamo ad un esempio di K-sistemi.

Esempio. Automorfismi di Bernoulli Sia (Ω, Φ, μ) un automorfismo di Bernoulli con spazio degli stati (Y, σ_Y, ν_Y) , e si ponga

$$C(y) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Omega : x_0 = y\}$$

(insieme delle sequenze in cui il 0-esimo risultato sia un y fissato), $\forall y \in Y$.

Se si pone $\xi_0 := \{C(y) : y \in Y\}$, si può dimostrare la partizione

$$\xi := \bigvee_{t=0}^{\infty} \Phi^t \xi_0$$

genera una σ -algebra $G = G(\xi)$ che verifica la definizione di K-sistema.

Definizione 4.2. Un SD (Ω, Φ, μ) si dice **mescolante** se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle f \circ \Phi^t \cdot g \rangle_\mu = \langle f \rangle_\mu \langle g \rangle_\mu$$

$\forall f, g \in L^2(\Omega, \mu)$.

Si può dimostrare che Mescolante $\Rightarrow$ Ergodico.

La nozione di K-sistema, invece, è una nozione più forte dell’ergodicità e del mescolamento, come mostra la seguente

Proposizione 4.1. Ogni K-sistema è mescolante.

Proof. Siano Φ un K-sistema, ξ_0 una K-partizione.

Si fissi $r \in \mathbb{N}$, e si consideri $f \in L^2(\Omega, \Phi^r G, \mu)$.

Allora $f \circ \Phi^t, g \circ \Phi^t \in L^2(\Omega, \Phi^{r+t} G, \mu)$, e

$$\int_{\Omega} f(\Phi^t(x))g(x)d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x)g(\Phi^{-t}(x))d\mu(x)$$

$$= \langle f, g \circ \Phi^{-t} \rangle \leq \|P_{r-n}f\| \|g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

dove P_k è la proiezione su $L^2(\Omega, \Phi^k G, \mu)$. $\square$

Si può dare una caratterizzazione dei K-sistemi.

Teorema 4.1. Sono equivalenti:

- Φ è un K-sistema;
- per ogni partizione finita η si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta := \bigwedge_{n=0}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} \Phi^{-k} \eta = \{\Omega\};$$

- $h(\Phi, \xi) > 0$ per ogni partizione finita $\xi, \xi \neq \{\Omega\}$.

I K-sistemi hanno **entropia strettamente positiva**;

- Φ è K-mescolante, ie $\forall r \geq 0, A_1, \dots, A_r \in \sigma_{\Omega}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in \sigma(\Phi^t A_i | t \geq n, i=1, \dots, r)} |\mu(A_0 \cap B) - \mu(A_0)\mu(B)| = 0.$$

Il Teorema precedente permette di caratterizzare i K-sistemi, e di legarli all'entropia K-S. Per riassumere, valgono le seguenti implicazioni:

Proposizione 4.2. K-mescolamento $\Rightarrow$ Mescolamento $\Rightarrow$ Ergodicità.

References

- [1] G. Benettin, *Introduzione ai Sistemi Dinamici*, non pubblicate, 1995
Dispense introduttive che trattano Teoria Ergodica, Sistemi Iperbolici e Teoria delle Perturbazioni. Sono presenti molti esempi e figure.

- [2] I.P.Cornfeld, S.V. Fomin e Ya G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, 1982
Manuale molto completo (480 pagg.), approccio accessibile.

- [3] Ya G. Sinai et al., *Mathematical Physics I - Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications*, Springer, 2010
Manuale ancora più completo, ma con un approccio molto più asciutto (e con poche dimostrazioni).