

Il problema di Bernstein

Speaker: Tiziana Eugenio
Supervisor: Prof. Guido De Philippis

23/10/2026

Sommario

Il teorema di Bernstein afferma che, se $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ risolve l'equazione delle superfici minime su tutto $\mathbb{R}^n$, allora u è affine per $n \leq 7$. Il risultato è stato stabilito da Bernstein ($n = 2$) [3], De Giorgi ($n = 3$) [7], Almgren ($n = 4$) [1] e Simons ($n \leq 7$) [12], mentre per $n \geq 8$ abbiamo dei controesempi (i coni di Simon (dei normalissimi coni in dimensione 8), per esempio) [4].

Il caso di ipersuperfici che non sono globalmente grafici di funzioni è stato risolto sotto ipotesi di crescita euclidea per $n \leq 5$ da Schoen, Simon e Yau [11], per $n \leq 6$ da Bellettini nel 2025 [2].

Successivamente si è passati al caso senza crescita euclidea, nei paper di Fischer-Colbrie e Schoen [9] per $n = 2$, di Chodosh e Li [5] per $n = 3$, di Chodosh, Li, Minter e Stryker [6] per $n = 4$ e di Mazet [10] per $n = 5$. Il caso $n = 6$ è ancora aperto.

In questo seminario introdurrò il problema di Bernstein per poi seguire le idee principali dei due lavori di Schoen-Simon-Yau e Bellettini e discutere dei modi utilizzati da Fischer-Colbrie-Schoen e Chodosh-Li nei casi $n = 2, 3$ per rimuovere l'ipotesi di crescita euclidea.

Riferimenti bibliografici

- [1] Frederick J. Almgren, Jr., *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 277–292.
- [2] Costante Bellettini, *Extensions of Schoen–Simon–Yau and Schoen–Simon theorems via iteration à la De Giorgi*, Invent. Math. **240** (2025), 1–34.

- [3] Serge Bernstein, *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Soc. Math. Kharkov (2) **15** (1915–1917), 38–45.
- [4] Enrico Bombieri, Ennio De Giorgi, and Enrico Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.
- [5] Otis Chodosh and Chao Li, *Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$* , Acta Math. **233** (2024), no. 1, 1–31.
- [6] Otis Chodosh, Chao Li, Paul Minter, and Douglas Stryker, *Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^5$* , 2024.
- [7] Ennio De Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **19** (1965), 79–85.
- [8] Alessio Figalli, *Il problema di Bernstein e una congettura di De Giorgi*, Master’s thesis, Università degli Studi di Pisa, 2004, Tesi di laurea, relatore G. Alberti.
- [9] Doris Fischer-Colbrie and Richard Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 2, 199–211.
- [10] Laurent Mazet, *Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^6$* , 2024.
- [11] Richard Schoen, Leon Simon, and Shing-Tung Yau, *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta Math. **134** (1975), 275–288.
- [12] James Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62–105.