6. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare definita da $f(x,y,z) = (y, y+x-z, 3y, z-x)$

(a) Si trovi la matrice di f rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.

(b) Si verifichi che $B = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Si trovi la matrice di f rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica nel codominio.

VEDIAMOLO ASSIEME:

a) VOGLIAMO LA MATRICE DI f RISPETTO ALLE BASI CANONICHE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO

PER FARLO DEVO PRENDERE I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. $f(x,y,z) = (y, y+x-z, 3y, z-x)$

$f(e_1) = (0, 0+1-0, 0, 0-1) = (0,1,0,-1)$

$f(e_2) = (1,1,3,0)$, $f(e_3) = (0,-1,0,1)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{G}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 3 PIVOT $\Rightarrow$ BASE

c) PER TROVARE QUESTA MATRICE NON BISOGNA PIÙ PARTIRE DAI VETT. DELLA BASE CANONICA MA DA QUELLI DI B

POICHÉ IL CODOMINIO UTILIZZA LA BASE CANONICA, LE COORD. COINCIDERANNO CON LE COMPONENTI DEI VETTORI TROVATI

$B = \{\underset{v_1}{(-1,1,1)}, \underset{v_2}{(1,-1,1)}, \underset{v_3}{(1,1,-1)}\}$, $f(x,y,z) = (y, y+x-z, 3y, z-x)$

$f(v_1) = (1,-1,3,2)$, $f(v_2) = (-1,-1,-3,0)$, $f(v_3) = (1,3,3,-2)$

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(1,1,0,0) = (3,1,2)$, $f(1,0,1,0) = (2,0,2)$, $f(0,1,0,0) = (-1,-2,1)$ e $f(0,0,1,1) = (1,-1,2)$.
   (a) Si verifichi che i vettori di $\mathbb{R}^4$ elencati costituiscono una base, che chiameremo B.
   (b) Si scriva l'espressione generale della funzione lineare f per un vettore (x,y,z,t).
   (c) Si scriva la matrice di f rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica nel codominio.
   (d) Si scriva la matrice di f rispetto alle base canoniche sia nel dominio che nel codominio.

a) $B = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \text{ PIVOT} \Rightarrow \text{BASE} \checkmark$$

b) BISOGNA TROVARE LE IMMAGINI DELLA BASE CANONICA

$e_1 = (1,1,0,0) - (0,1,0,0)$. USANDO LA LINEARITÀ

$f(e_1) = f(1,1,0,0) - f(0,1,0,0) = (3,1,2) - (-1,-2,1)$

$= (4,3,1)$

$$f(e_2) = f(0,1,0,0) = (-1,-2,1)$$

$$f(e_3) = f((1,0,1,0) - e_1) = (2,0,2) - (4,3,1)$$

$$= (-2,-3,1)$$

$$f(e_4) = f((0,0,1,1) - e_3)) = (1,-1,2) - (-2,-3,1)$$

$$= (3,2,1)$$

$$f(x,y,z,t) = x(4,3,1) + y(-1,-2,1) + z(-2,-3,1) + t(3,2,1)$$

$$= (4x - y - 2z + 3t,\ 3x - 2y - 3z + 2t,\ x + y + z + t)$$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(-1,2,0) = (0,1,2)$, $f(1,0,1) = (1,0,2)$ e $f(-2,-1,1) = (1,-1,0)$.

   (a) Si verifichi che i vettori $\{(-1,2,0),(1,0,1),(-2,-1,1)\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, che chiameremo B.

   (b) Si trovi la matrice associata ad f rispetto alle seguenti basi:

      i. alla base B nel dominio e alla base canonica nel codominio;

      ii. alla base B sia nel dominio che nel codominio;

      iii. alla base canonica sia nel dominio che nel codominio.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ 3 PIVOT $\Rightarrow$ BASE

b.1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b.2) QUI VIENE RICHIESTA LA BASE B SIA NEL DOM CHE NEL CODOM. DOBBIAMO QUINDI SCRIVERE LE IMMAGINI DEI VETTORI DI B (B NEL DOMINIO) COME COMB. LIN. DEI VETTORI IN B STESSO (B NEL CODOM).

$f(-1,2,0) = (0,1,2)$; $f(1,0,1) = (1,0,2)$, $f(-2,-1,1) = (1,-1,0)$

$(0,1,2) = a(-1,2,0) + b(1,0,1) + c(-2,-1,1) = a = \frac{10}{14}, \; b = \frac{11}{7}, \; c = \frac{3}{7}$ ☆

$(1,0,2) = a(-1,2,0) + b(1,0,1) + c(-2,-1,1) = a = \frac{2}{14}, \; b = \frac{12}{7}, \; c = \frac{2}{7}$

$(1,-1,0) = a(-1,2,0) + b(1,0,1) + c(-2,-1,1) = a = \frac{-8}{14} \; b = \frac{1}{7} \; c = -\frac{1}{7}$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{10}{14} & \frac{2}{14} & -\frac{8}{14} \\ \frac{11}{7} & \frac{12}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

ES: ☆ $\begin{cases} 0 = -a + b - 2c \\ 1 = 2a - c \\ 2 = b + c \end{cases}$

b.3) $B = \underset{v_1}{(-1,2,0)}, \underset{v_2}{(1,0,1)}, \underset{v_3}{(-2,-1,1)}$

☆ $e_1 = -\frac{1}{7} v_1 + \frac{2}{7} v_2 - \frac{2}{7} v_3$

$e_2 = \frac{3}{7} v_1 + \frac{1}{7} v_2 - \frac{1}{7} v_3$

$e_3 = \frac{1}{7} v_1 + \frac{5}{7} v_2 + \frac{2}{7} v_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

☆ ES: $\begin{cases} 1 = -a + b - 2c \\ 0 = 2a - c \\ 0 = b + c \end{cases}$

9. Si considerino le matrici A, B, C e i vettori u, v, w su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino i vettori Au, Bv e Cw.

$$Au = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot -1 + 0\,2 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot -1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot -1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot -1 + 0 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Bv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+1 \\ 2+1+0 \\ 0-1+1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Cw = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5 \\ -12-10 \\ -6+10 \\ 6+4+15 \\ 12-6+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \\ +4 \\ 25 \\ 26 \end{pmatrix}$$