ESERCIZI DA APPELLI D'ESAME PASSATI!

30/08/23, APPELLO

Esercizio 5. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z).$$

(a) Si scriva la matrice A che rappresenta la funzione f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si calcoli il determinante di A tramite lo sviluppo di Laplace.

(c) Si dica se la matrice A è invertibile. Se lo è si determini la sua inversa.

(d) Si calcolino gli autovalori di A.

(e) La matrice A è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.

RICORDO: AUTOVALORI: ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO: $P(\lambda) = \det(A - \lambda\, id)$

DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE DEGLI AUTOVAL È n (A MAT $n \times n$)

n AUTOVAL. DISTINTI $\Rightarrow$ DIAGONALIZZABILE

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) LAPLACE LUNGO LA 2ª COLONNA: $\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

c) A INVERTIBILE PERCHÉ $\det A \neq 0$.

CALCOLANDO (O CON COFATTORI O CON GAUSS):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/3 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 1/3 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda id = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda id) \overset{\substack{\text{LAPLACE 2° COL.} \\ \uparrow}}{=} (1-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda)+2\right]$

$= (1-\lambda)(4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2) = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$

ZERI: $(1-\lambda) \Rightarrow \lambda = 1$

$\lambda^2-5\lambda+6 \Rightarrow \lambda=2,\ \lambda=3$

e) 3 AUTOVALORI DISTINTI $\Rightarrow$ A È DIAGONALIZZANTE

9/06/25, MODELLO 3° COMPITINO

4. Si consideri la matrice A_t in $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, dove t è un parametro reale, definita da

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A_t, nel variare di t.

(b) Si determinino le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore, nel variare di t.

(c) Per quali valori di t la matrice A_t è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.

RICORDO $m_a(k)$ È LA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE, IL GRADO CON CUI APPARE

ES: $(x-3)^4 \Rightarrow m_a(3)=4$

$m_g(k) = n - rk(A-k\,id)$, CON $A \in M_{n\times n}$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 2 \end{pmatrix}$. $A - \lambda id = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & t & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda id) \overset{\substack{\text{LAPLACE } 3^a \text{ COLONNA} \\ \uparrow}}{=} 2-\lambda \cdot \left[(3-\lambda)(2-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)^{\boxed{2}}(3-\lambda)^{\boxed{\ }} \Rightarrow \text{AUTOVALORI: } \lambda = 2,\ \lambda = 3$$

INDIPENDENTI DA t!

b) CHIARAMENTE: MOLT. ALGEBRICA: $m_a(2) = \boxed{2}$, $m_a(3) = \boxed{1}$

PER LA MOLT. GEOM. INVECE

$m_g(3) = 1$ PERCHÉ $m_g \leq m_a$ e $m_g \geq 1$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq m_g(3) \leq m_a(3) \Rightarrow 1 \leq m_g(3) \leq 1$$

$$\Rightarrow m_g(3) = 1$$

SICCOME $m_g(2) = 3 - rk(A - 2Id)$ CALCOLO $rk(A-2Id)$

$$A - 2Id: \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & t & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

SCAMBIO R_2 e R_3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

SE $t=0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A-2Id)=1 \Rightarrow m_g(2)=3-1=2$

SE $t\neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2/t}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A-2Id)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_g(2)=3-2=1.$

c) PER AVERE LA DIAGONALIZZABILITÀ VOGLIO

$m_g(2)+m_g(3)=3 \Rightarrow m_g(2)+1=3 \Rightarrow m_g(2)=2$

QUESTO ACCADE SOLO PER $t=0$

18/07/24, APPELLO

Esercizio 5. Si consideri la matrice A_α in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definita da

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizzando lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante, si determinino gli autovalori di A_α, al variare di α.

(b) Per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.

(c) Si consideri $\alpha = 0$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A_0? In caso affermativo si trovi una tale base.

RICORDO: $\exists$ BASE DI AUTOVETTORI $\Leftrightarrow$ A DIAGONALIZZABILE

DATO λ AUTOVALORE, v È UN AUTOVETTORE SE $(A-\lambda id)v=0$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{LAG. } 2^\circ \text{ RIGA}}{=} (\alpha-\lambda)\left[(-\lambda)(1-\lambda)-2\right] = (\alpha-\lambda)\left[-\lambda+\lambda^2-2\right]$$

$$= (\alpha-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

AUTOVALORI: $(\alpha-\lambda) \Rightarrow \lambda=\alpha$

$(\lambda^2-\lambda-2) \Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=2$

b) A È SICURAMENTE DIAG. PER $\alpha \neq -1, 2$ IN QUANTO OTTENGO 3 AUTOVAL DISTINTI. DEVO ORA CONSIDERARE $\alpha=-1$ e $\alpha=2$

$\alpha=-1$:

$$A_{-1}-(-1 \cdot Id) = \begin{pmatrix} 0+1 & -2 & -1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ -2 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rk(A_{-1}) = 2 \Rightarrow m_g(-1) = 3-2 = 1.$

SICCOME $m_g(2) = \underline{1}$ (VISTO $m_a(2)=1$) $\Rightarrow m_g(2)+m_g(-1) = 2 \neq 3$
$\Rightarrow$ NON È DIAG.

$\alpha=2$: $A_2 - 2Id$: $\begin{pmatrix} 0-2 & -2 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -2 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$rk(A_2 - 2Id) = 2 \Rightarrow m_g(2) = 1 \Rightarrow$ NON DIAG. (VEDI SOPRA)

QUINDI A DIAG. $\Leftrightarrow \alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 2$

C: $\alpha=0$; $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ESISTE UNA BASE DI AUTOVETT. IN QUANTO A_0 È DIAGONALIZZ.

v_{-1}: $(A-(-1)Id)v = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} +1 & -2 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} +x-2y-z=0 \\ -y=0 \\ -2x+2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z \\ -2x+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_{-1}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-z=0 \\ -2y=0 \\ -2x-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x=z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = v_2$$

$$v_0: \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y-z=0 \\ -2x+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{z}{2} \\ x=\frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z/2 \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\{v_{-1}, v_0, v_2\}$ SONO UNA BASE DI AUTOVETTORI.