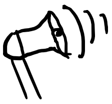
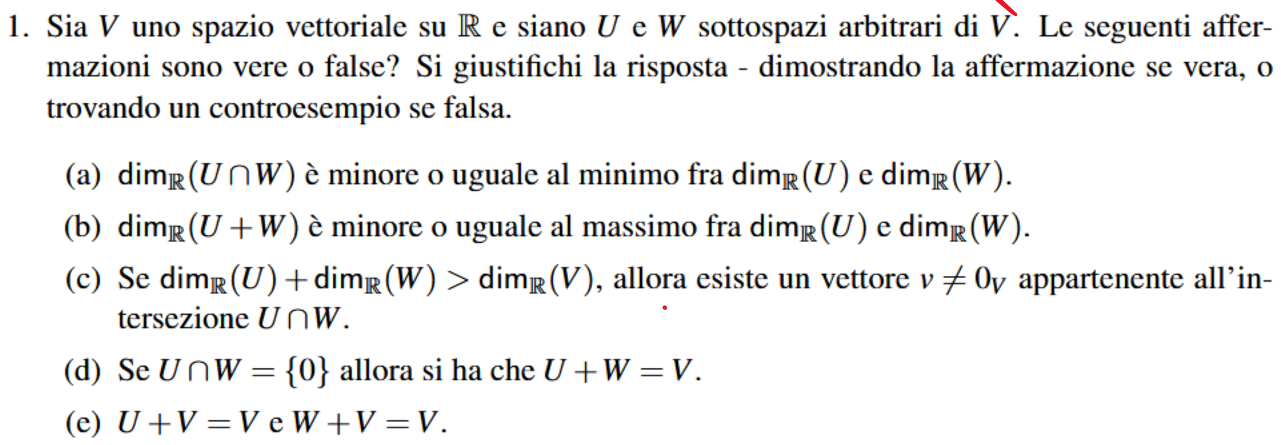
FEEDBACK CORSO



(SU MOODLE)

RICORDIAMO: • FORMULA DI GRASSMANN: $U, W \leq V$ $\mathbb{K}$-SP. VETT.

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(U+W)=\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(U)+\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(W)-\cancel{\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(U\cap W)}$$



1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano U e W sottospazi arbitrari di V. Le seguenti affermazioni sono vere o false? Si giustifichi la risposta - dimostrando la affermazione se vera, o trovando un controesempio se falsa.
   (a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ è minore o uguale al minimo fra $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.
   (b) $\dim_{\mathbb{R}}(U+W)$ è minore o uguale al massimo fra $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.
   (c) Se $\dim_{\mathbb{R}}(U)+\dim_{\mathbb{R}}(W) > \dim_{\mathbb{R}}(V)$, allora esiste un vettore $v \neq 0_V$ appartenente all'intersezione $U \cap W$.
   (d) Se $U \cap W = \{0\}$ allora si ha che $U+W=V$.
   (e) $U+V=V$ e $W+V=V$.

a) VERO! AL MASSIMO AVRÒ INFATTI $U \cap W = U \Rightarrow \dim(U\cap W) = \dim(U)$

b) FALSO! BASTA PRENDERE GRASSMANN CON $\dim(U \cap W) = 0$

c) VERO! ALTRIMENTI AVREI DA GRASS. CHE $\mathrm{Dim}(U+W) > \dim(V)$, ASSURDO IN QUANTO $U+W \leq V$!

d) FALSO! DEVE VALERE ANCHE $\mathrm{Dim}(U)+\mathrm{Dim}(W)=\mathrm{Dim}(V)$
(PRENDETE 2 SPAZI DI DIM 1 CON INTERSEZ. NULLA DENTRO UNO SPAZIO DI DIM >2, ES 2 RETTE NON INCIDENTI IN $\mathbb{R}^3$)

e) FALSO! È VERO SOLO SE $\mathrm{Dim}(U)+\mathrm{Dim}(W)=\mathrm{Dim}\,V$
e $\mathrm{Dim}(U\cap W)=0$

4. Sia W il sottospazio di soluzioni in $\mathbb{R}^4$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+t-y=0 \end{cases} .$$

Dall'altra parte, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$: $V = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,3) \rangle$

(a) Si determini una base di $V \cap W$. Gli sottospazi V e W sono in somma diretta?

(b) Si determini una base di $V + W$.

$\hookrightarrow V \cap W = \emptyset$

(c) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in V.

(d) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in W.

(e) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in $\mathbb{R}^4$.

(f) Si trovi un complemento di V in $V + W$.

(g) Si trovi un complemento di W in $V + W$.

(h) Si trovi un complemento di $V + W$ in $\mathbb{R}^4$.

$$W = \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+t-y=0 \end{cases} \qquad V = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,3) \rangle$$

TROVO UNA BASE DI W: ISOLO RISPETTO A z e t (ARBITRARIO)

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x+3y \\ t = y-2x \end{cases} \Rightarrow \text{GENERICO VETTORE DI } W$$

$$(x,y,x+3y,y-2x) =$$

$$= x\underbrace{(1,0,1,-2)}_{w_1} + y\underbrace{(0,1,3,1)}_{w_2}$$

$\Rightarrow$ OGNI VET. DI W È COMB. LIN. DI $(1,0,1,-2)$ e $(0,1,3,1)$

CHE SONO CHIARAMENTE LIN. INDIP $\Rightarrow \operatorname{Dim} W = 2$

E $W = \langle (1,0,1,-2),(0,1,3,1) \rangle$

PRIMA COORDINATA $\Rightarrow$ IN UNO

E $\neq 0$ NELL'ALTRO

$V = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,3) \rangle \Rightarrow$ LIN. INDIP. $\Rightarrow \operatorname{Dim}(V) = 2$

E QUELLA È UNA SUA BASE

$), (0,1,0,3)\} \Rightarrow$ LIN. INDIP. $\Rightarrow \mathrm{Dim}(V) = 2$

E QUELLA È UNA SUA BASE

TROVO $U \cap W$: VETTORE GENERICO IN V

$$a = \alpha(1,1,1,1) + \beta(0,1,0,3) = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha, \alpha+3\beta)$$

PONGO ORA a IN MODO CHE $\in W$, OVVERO SODDISFI LE SUE CONDIZ.

$$W = \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+t-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3(\alpha+\beta)-\alpha=0 \\ 2\alpha+(\alpha+3\beta)-(\alpha+\beta)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta \\ -2\beta+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta \\ 0=0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ I VETTORI CON $\alpha=-\beta$

$\Rightarrow a = (\alpha, 0, \alpha, -2\alpha)$ APPARTENGONO SIA A W CHE V

$= \alpha(1,0,1,-2)$ $\overset{w_1}{//}$

$\Rightarrow W \cap V = \langle 1,0,1,-2 \rangle$ e $\mathrm{Dim}(U \cap W) = 1$

SOMMA DIRETTA $\Leftrightarrow \mathrm{Dim}(U \cap W) = 0 \Rightarrow$ NO!

$(\Rightarrow U \cap W = \phi)$

BASE DI $V+W$: $\mathrm{Dim}(V+W) = \mathrm{Dim}\, V + \mathrm{Dim}\, W - \mathrm{Dim}(V \cap W)$

$= 2+2-1=3$

DOBBIAMO SCEGLIERE 3 VETTORI IN V e W LIN. INDIP.

$\Rightarrow$ SCELGO $\underbrace{v_1, v_2}_{\text{LIN. INDIP PERCHÉ BASE DI } V}$, e $w_2 = (0,1,0,3)$ (IN QUANTO $w_1 \in U \cap W$)

LIN INDIP. PERCHÉ W_2 NON È MULTIPLO DI V_2 (NON PUÒ CHIARAMENTE ESSERE SOMMA DI V_1)

$$\Rightarrow V+W = \langle \underset{v_1}{(1,1,1,1)}, \underset{v_2}{(0,1,0,3)}, \underset{w_2}{(0,1,3,1)} \rangle$$

COMPLETAMENTO DI $V \wedge W$ IN V: $v_1, v_2 = V$

NOTO $V \wedge W = \langle 1,0,1,-2 \rangle$ e $(1,0,1,-2) = v_1 - v_2$. $w_1 = v_1 - v_2$

POSSO QUINDI SCEGLIERE v_1 O v_2 PER COMPLETARE IN V

COMPLETAMENTO DI $V \wedge W$ IN W

NOTO CHE $V \wedge W = \langle 1,0,1,-2 \rangle = \langle w_1 \rangle$

BASTA AGGIUNGERE w_2 PER COMPLETARE.

COMPLETAMENTO DI $V \wedge W$ IN $\mathbb{R}^4$

AGGIUNGO I 4 VETTORI DELLA BASE CANONICA e_1, e_2, e_3, e_4

$$\overset{v_1}{(1,0,1,-2)} = e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3 - 2e_4$$

$$\Rightarrow e_1 = -(1,0,1,-2) + 0 \cdot e_2 - e_3 + 2e_4$$

$$\Rightarrow \langle (1,0,1,-2), e_2, e_3, e_4 \rangle$$

È UN COMPLETAMENTO DI $\mathbb{R}^4$ (CHIARAMENTE LIN. INDIP.)

COMPLETAMENTO DI V IN $V+W$

NOTO CHE $V+W = \langle v_1, v_2, v_2 \rangle \Rightarrow$ BASTA AGGIUNGERE w_2

A $V = \langle v_1, v_2 \rangle$

COMPLETAMENTO DI W IN $V+W$

$W = \langle w_1, w_2 \rangle$, $V+W = \langle v_1, v_2, w_2 \rangle$

SO CHE $w_1 = v_1 - v_2 \Rightarrow$ AGGIUNGO v_2 O v_1 A $W = \langle w_1, w_2 \rangle$

E COMPLETO.

COMPLETAMENTO DI $W+V$ IN $\mathbb{R}^4$

$$W + V = \overset{v_1}{(1,1,1,1)}, \overset{v_2}{(0,1,0,3)}, \overset{w_2}{(0,1,3,1)}$$

$W + V = \overset{v_1}{(1,1,1,1)}, \overset{v_2}{(0,1,0,3)}, \overset{w_2}{(0,1,3,1)}$

NOTO CHE $e_1 = (1,0,0,0)$ È LIN. INDIP.

(NON PUÒ ESSERE SOMMA DI v_2 E w_2 E NON È MULTIPLO DI v_1, LO VERIFICO CON LA MATRICE.)

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ e_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{GAUSS}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

6. Sia t un parametro reale e si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di A_t per $t = -1$.

(b) Si calcoli il rango di A_t per ogni valore di t.

(c) Supponiamo che la matrice A_t è la matrice completa di un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{R}$. Per quali valori di t il sistema avrà soluzioni?

(d) Per i valori di t per cui il sistema di equazioni considerato in (c) ha soluzioni, si trovino tutte tali soluzioni.

RICORDO: RANGO = NUMERO RIGHE (COLONNE) LIN. INDIP
= DIM DEL SOTTOSP. GENERATO DALLE RIGHE (COLONNE)

ROUCHÉ-CAPELLI: SIA $A = (A'|b)$ LA MAT. DI UN SISTEMA DI m INCOGNITE ED n EQ

- IL SISTEMA HA SOL. SSE $rk(A'|b) = rk A$
  - SONO INFINITE SE $rk(A'|b) = rk A < n$
  - È UNICA SE $rk(A'|b) = rk A = n$

GAUSS: $\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 0 & -(t+1) & 1-t & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$

$$\text{SE } t=-1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk\, A = 3$$

LIN. DIP

$t \neq 1 \Rightarrow$ HO COMUNQUE 3 PIVOT $\Rightarrow rk(A) = 3 \ \forall t$

$$\text{SE A MAT SIST. COMPL} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & -1 & t \\ 0 & -(t+1) & 1-t & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A'}$$

$\Rightarrow t=-1 \Rightarrow rk\, A' = 2 \neq rk\, A \Rightarrow$ PER R-C. NON HA SOL.

$\Rightarrow t \neq -1 \Rightarrow rk\, A' \underset{\substack{\downarrow \\ 3 \text{ PIVOT}}}{=} 3 = Rk\, A \Rightarrow$ PER R-C. HA SOL.

$$\text{SOL: } \begin{cases} x + ty - z = t \\ -(t+1)y + (1-t)z = 2-t \\ z = t+1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{aligned} z &= t+1 \\ y &= -\frac{t^2-t+1}{t+1} \\ x &= \frac{t^3+t^2+4t+1}{t+1} \end{aligned}$$

7. Per ogni parametri t e k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_{t,k} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -4 & 16 \\ 2 & 3 & -k & t \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di $A_{t,k}$ per ogni valore di t e di k.

(b) Supponiamo che $A_{t,k}$ è la matrice completa di un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{R}$.

  i. Per quali valori di t e di k il sistema avrà soluzioni?
  ii. Per quali valori di t e di k il sistema avrà un'unica soluzione?
  iii. Per quali valori di t e di k il sistema avrà infinite soluzioni? In tali casi, quante variabile libere ci sono?

$$A_{t,k} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -4 & 16 \\ 2 & 3 & -k & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & +2 & 4 \\ 0 & 1 & -k+4 & t-8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -k+3 & t-10 \end{pmatrix}$$

- $k=3 \Rightarrow$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t-10 \end{pmatrix}$$

- $t=10$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{rk=2}$$

- $t\neq 10$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\neq 0}{t-10} \end{pmatrix}$$

$rk=3$

- $k\neq 3$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{-k+3} & t-10 \end{pmatrix}$$

- $t=10$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{-k+3} & 0 \end{pmatrix}$$

$rk=3$

$$\bullet\ t \neq 10 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{-k+3} & \underset{\neq 0}{t-10}\end{pmatrix} \quad rk = 3$$

PER AVERE SOL. $rk\,A = rk\,A'$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -k+3 & t-10\\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A'}} & \underbrace{\qquad}_{b}\end{array}\right) = A$$

- $k=3$ $t=10 \Rightarrow rk\,A = 2$
  $rk\,A' = 2 \Rightarrow$ HA SOL.
  (INFINITE)

- $k=3$ $t \neq 10 \Rightarrow rk\,A = 3$
  $rk\,A' = 2 \Rightarrow$ NON HA SOL.

- $k \neq 3$, $t = 10$ $rk\,A = 3$
  $rk\,A' = 3 \Rightarrow$ HA SOL. (UNA!)

$k \neq 3$, $t \neq 10$: $rk\,A = 3$
$rk\,A' = 3$ $\Rightarrow$ HA SOL. (UNA!)