Exercizio 1. Trovare una base di nucleo e immagine delle seguenti funzioni lineari:

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a, b, c) = (a - b, c)$.
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (2x - y, x - z, x + z)$.
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(x, y, z) = (2x - y, x - z, x + z, x - z)$.
(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x + 2y, x - y, 2x - 3y)$.
(5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y, 2x - z, 2x - 3y)$.

RICORDO: $f: V \to W$ $\quad N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

$\mathrm{Im}(f) := \{w \in W \mid \exists v \text{ t.c. } f(v) = w\}$

SONO SOTTOSPAZI DI V!

FORMULA DELLE DIMENSIONI: $f: V \to W$ LIN, $\dim V = n$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(N(f)) = n$

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \mapsto (a - b, c)$

$N(f)$: $f((a,b,c)) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ TUTTI I VETTORI DEL TIPO $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, Dim $= 1$

$\mathrm{Im}(f)$: $f(a,b,c) = (x,y) \Rightarrow (a - b, c) = (x, y)$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = x \\ c = y \end{cases}$

$\forall$ SCELTA DI (x,y) ESISTONO (a,b,c) TALI CHE $f(a,b,c) = (x,y)$

$\Rightarrow f(a,b,c) = (a-b, c) = (x,y)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{Dim}\, \mathrm{Im} = 2$

(NOTO CHE COME CI SI ASPETTAVA: $\text{Dim } N + \text{Dim Im} = 1+2 = 3$)

ALTERNATIVA: $f(a,b,c) = (a-b,c) = a(1,0) + b(-1,0) + c(0,1)$

$\Rightarrow \{(1,0),(0,1)\}$ SONO UN INSIEME DI GENERATORI

$\Rightarrow$ SICCOME SO $\text{Dim } N + \text{Dim Im} = 3 \Rightarrow \text{Dim Im} = 2$

ALLORA $\{(1,0),(0,1)\}$ È ANCHE UNA BASE.

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (2x-y, x-z, x+z)$

$$N(f): \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x=z \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow N(f) = (0,0,0) \Rightarrow \text{Dim } N(f) = 0$

$\text{Im } f: (2x-y, x-z, x+z) = x(2,1,1) + y(-1,0,0) + z(0,-1,1)$

$\Rightarrow \{(2,1,1),(-1,0,0),(0,-1,1)\}$ SONO GEN. PER $\text{Im } f$

$\Rightarrow$ SICCOME $\text{Dim Im } f = 3-0 = 3$ SONO ANCHE UNA BASE

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (2x-y, x-z, x+z, x-z)$

$$N(f): \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \\ x+z=0 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\text{Dim } N(f) = 0$

$\text{Im } f: x(2,1,1,1) + y(-1,0,0,0) + z(0,-1,1,-1)$

$\Rightarrow \{(2,1,1,1), (-1,0,0,0), (0,-1,1,-1)\}$ GEN.

$\Rightarrow$ Dim Im$f = 3 \Rightarrow$ SONO UNA BASE

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y) \mapsto (x+2y, x-y, 2x-3y)$

$$N: \begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ * \end{cases}$$

$N(f) = 0$, Dim $N = 0$

$\text{Im}(f): x(1,1,2) + y(2,-1,-3)$

$\{(1,1,2), (2,-1,-3)\}$ SONO GEN

$\Rightarrow$ Dim Im $= 2 \Rightarrow$ È UNA BASE

5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x+y, 2x-z, 2x-3y)$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ 2x=z \\ 2x=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ 2x=z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Dim $N = 0$

Im$f: x(1,2,2) + y(1,0,-3) + z(0,-1,0)$

$\{(1,2,2),(1,0,-3),(0,-1,0)\}$ GEN.

MA $\dim Im = 3 \Rightarrow$ BASE

I PROSSIMI ES. SONO PRESI DA UNA SCHEDA DELL'ANNO SCORSO DEL PROF VITÓRIA

2. Si consideri la funzione $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $g(x,y,z) = (x-y, x+y-z, 2x, z-2y)$.

    (a) Si verifichi che g è una funzione lineare.

    (b) g è un isomorfismo? Perché?

    (c) Si determini una base per il nucleo e per l'immagine.

    (d) La funzione g è iniettiva? Perché?

    (e) La funzione g è suriettiva? Perché?

RICORDO: $f: V \longrightarrow W$

f INIETTIVA $\Leftrightarrow N(f) = 0$

f SURIETTIVA $\Leftrightarrow Im(f) = W$

$f(v)$ È LINEARE SE:

$f(\lambda v) = \lambda f(v)$

$f(v+w) = f(v) + f(w)$

$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $g(x,y,z) = (x-y, x+y-z, 2x, z-2y)$

LINEARITÁ: $f(\lambda(x,y,z)) = (\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y - \lambda z, 2\lambda x, \lambda z - 2\lambda y)$

$= \lambda(x-y, x+y-z, 2x, z-2y)$

$= \lambda f(x,y,z)$

$f((x,y,z)+(a,b,c)) =$

$= ((x+a)-(y+b), (x+a)+(y+b)-(z+c), 2(x+a), (z+c)-2(y+b))$

$= \big((x-y)+(a-b), (x+y-z)+(a+b-c), 2x+2a,$
$(z-2y)+(c-2b) \big)$
$= f(x,y,z) + f(a,b,c)$

$N(f)$: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x=0 \\ z-2y=0 \end{cases} \sim \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \\ \star \end{cases} \rightarrow N(f)=0$

$\Rightarrow f$ è INIETTIVA

$Im(f)$ $\quad x(1,1,2,0)+y(-1,1,0,-2)+z(0,-1,0,1)$

GENERATORI $\Rightarrow$ Dim Im $=3$ $\Rightarrow$ è BASE

$Im f \cong \mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ NON è SURIETTIVA

$\Rightarrow f$ NON è UN ISOM.

5. Si consideri la funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$h(x,y,z,t) = (2x+y-t, t+y, 3x+2y+z+t, t+z+x)$$

(a) Si determini una base per $N(h)$.
(b) Si determini una base per $\mathrm{Im}(h)$.
(c) h è iniettiva e/o suriettiva? Perchè?
~~(d)~~ Si trovi una base $\mathcal{B}$ per un complemento per $N(h)$ in $\mathbb{R}^4$.
~~(e)~~ Si dimostri che l'immagine dei vettori in $\mathbb{B}$ tramite h costituiscono una base di $\mathrm{Im}(h)$.

$h: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \; (x,y,z,t) \longmapsto (2x+y-t, t+y, 3x+2y+z+t, t+z+x)$

$h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \ (x,y,z,t) \mapsto (2x+y-t,\ t+y,\ 3x+2y+z+t,\ t+z+x)$

$$\begin{cases} 2x+y-t=0 \\ t+y=0 \\ 3x+2y+z+t=0 \\ t+z+x=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t=2x+y \\ t=-y \\ t=-3x-2y-z \\ t=-z-x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ t=-y \\ z=-3x-y \\ t=-z-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y \\ t=-y \\ z=-2x \\ z=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ t=-y \\ z=2y \end{cases} \Longrightarrow N(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\rightsquigarrow \operatorname{Dim} N = 1$

$\operatorname{Im}(h): x(2,0,3,1) + y(1,1,2,0) + z(0,0,1,1) + t(-1,1,1,1)$

$\Rightarrow \operatorname{Dim} \operatorname{Im} = 4 \Rightarrow \{(2,0,3,1), (1,1,2,0), (0,0,1,1), (-1,1,1,1)\}$

SICCOME $\operatorname{Dim} \operatorname{Im} = 3$ DEVO TROVARE UNA BASE

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{G}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \text{ PIVOT}$$

$\Rightarrow ((1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,1))$

È UNA BASE DI $\operatorname{Im} h$.