2. Si considerino le funzioni lineari che rispetto alle basi canoniche in $\mathbb{R}^n$ hanno le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino basi per i nuclei di queste funzioni lineari.

(b) Si determinino basi per le immagini di queste funzioni lineari.

(c) Il vettore $(-5,-5,5)$ appartiene al nucleo della funzione associata ad A?

(d) Il vettore $(1,1,1,1)$ appartiene all'immagine della funzione associata a B?

(e) * Il vettore $u = (1,-2)$ appartiene all'immagine della funzione associata ad E? Se sì, si determini l'immagine reciproca di $\{u\}$.

(f) Si indichino quali di queste funzioni sono iniettive, suriettive o isomorfismi.

NUCLEO: $M\bar{x}=0$; $Im = C(M)$ SPAZIO DELLE COLONNE ; M MAT $m \times n$: INIETT : $rk = n$
SUR: $rk = m$
ISO: LIN + SUR + INIETT.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $rk=2 \Rightarrow$ NÉ INIETT. NÉ SUR.

$Im = C(A)$. NELLA FORMA RIDOTTA LE PRIME 2 COLONNE SONO DOMINANTI QUINDI $C(A)$ È GENERATO DALLE PRIME 2 COLONNE DELLA MAT. ORIGINALE:

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$N(A) = A\bar{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$ (z LIB.)

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = N(A)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $rk=3 \Rightarrow$ NO IN./SUR.

$$Im = C(B) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$N(B) = B\bar{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ y - 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \text{ LIBERA}$$

$$\Rightarrow N(B) = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$rk = 4 \Rightarrow$ IN e SUR!
$\Rightarrow$ ISO.

$$Im = C(C) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4, \quad N(C) = 0$$

(È UN ISOM QUINDI $\ker \equiv 0$)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -30 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk = 5 \Rightarrow$ IN + SUR!
$\Rightarrow$ ISO

$$Im = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\5\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^5$$

$N(D) \equiv 0$ (IN.)

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 2 \Rightarrow \text{SUR. } (rk = m)$$

$$Im = C(A) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

$$N(E) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = z \\ 2y = z \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $(5,5,-5) \in N(A)$? $N(A) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ SÍ}$$

d) $(1,1,1,1) \in Im(B)$? $Im(B) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b + c \\ 1 = b + c \\ 1 = -2a + 2b - c \\ 1 = 3a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2b + c \\ 1 = b + c \\ 1 = 2b - c \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{IMPOSSIBILE!} \Rightarrow (1,1,1,1) \notin Im(B)!$$

e) $(1,-2) \in Im\, E$? $Im(E) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ SÍ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y - \frac{1}{2}z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}z \\ y = -2 + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^{-1}\{M\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ +\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

6. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino $\det(A)$ and $\det(B)$.

(b) * Si determini se A e B sono invertibili e, in caso positivo, si trovi la rispettiva matrice inversa usando il metodo dei cofattori.

(c) Tramite l'uso della matrice inversa, si determini la soluzione del sistema di equazioni

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proposizione (Calcolo della matrice inversa)

Se A è una matrice $n \times n$ su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $\det(A) \neq 0$ (ovvero A è invertibile) allora si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}}{\det(A)} & \frac{c_{21}}{\det(A)} & \frac{c_{31}}{\det(A)} & \cdots & \frac{c_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{c_{12}}{\det(A)} & \frac{c_{22}}{\det(A)} & \frac{c_{32}}{\det(A)} & \cdots & \frac{c_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & & & & \\ \frac{c_{1n}}{\det(A)} & \frac{c_{2n}}{\det(A)} & \frac{c_{3n}}{\det(A)} & & \frac{c_{nn}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

dove $\underbrace{c_{ij}}_{\text{Cofattore } (i,j) \text{ di } A} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ dove A_{ij} è la matrice che si ottiene eliminando riga i e colonna j.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

LAPLACE: (1° COLONNA)

$$(-1)^2 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + $$

$$+ (-1)^4 \cdot 1 \det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (1-9) + -2(3-3) + (9-1)$$

$$= 2\cdot(-8) - 2\cdot 0 + 8$$

$$= -8$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

LAPLACE (3° COLONNA): $(-1)^4 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^6 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= (2-3) + 2\cdot(3-2) = -1 + 2\cdot 1 = 1$$

b) A e B SONO INVERTIBILI PERCHÉ $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Big[(-1)^2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -8,$
$(-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 0$
$(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 8 \ldots \Big]$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot A^{-1} \text{ A SX}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$