2. Consideriamo il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \langle (2,3,1,-1), (4,0,1,1), (-4,6,0,-4) \rangle$$

(a) Si determini una base per W.

(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga una base di W.

CONTROLLO SE I VETT. SONO L.I:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NON L.I.} \Rightarrow \text{BASTANO I PRIMI 2 VETTORI}$$

$$\Rightarrow \text{BASE}: \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) QUI HO 2 METODI: IL PRIMO È USARE IL PROCEDIMENTO VISTO NEL LEMMA DELLO SCAMBIO, IL SECONDO È UTILIZZANDO LE EQ. CARTESIANE.

a) LEMMA DI SCAMBIO

INNANZITUTTO PRENDO SOLAMENTE v_1 e v_2 DATO CHE v_3 È L.D.

PASSO 1) PRENDO UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$. PER SEMPLICITÀ PRENDO QUELLA CANONICA: $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

PASSO 2) SCRIVO v_1 COME COMB. LIN. DI VETTORI DI B

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 1 \cdot e_3 - 1 \cdot e_4$$

SCELGO ORA UNO TRA GLI e_i E LO ISOLO. PER ESEMPIO e_3

$$\Rightarrow e_3 = -2e_1 - 3e_2 + e_4 + v_1$$

POSSO QUINDI PRENDERE COME INSIEME DI GENERATORI

$B' = \{e_1, e_2, e_4, v_1\}$

PASSO 3) RIPETO: SCRIVO v_2 COME COMB. LIN. DI VETTORI IN $\underline{B'}$: $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_4 + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4 = \alpha + 2\delta \\ 0 = \beta + 3\delta \\ 1 = \quad + \delta \\ 1 = \gamma - \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \alpha + 2 \\ 0 = \beta + 3 \\ 1 = \delta \\ \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_2 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_4 + v_1$

ISOLO UN ALTRO VETTORE A SCELTA TRA e_1, e_2, e_4

$\Rightarrow$ ISOLO $e_2 \Rightarrow +3e_2 = 2e_1 + 2e_4 + v_1 - v_2$

$e_2 = +\frac{1}{3}(2e_1 + 2e_4 + v_1 - v_2)$

$\Rightarrow B'' = \{e_1, e_4, v_1, v_2\}$

VERIFICO CHE SONO LIN. INDIP.

$\alpha e_1 + \beta e_4 + \gamma v_1 + \delta v_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma + 4\delta = 0 \\ 3\gamma = 0 \\ \quad + \gamma + \delta = 0 \\ -\gamma + \delta + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

4. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il seguente sottospazio:

$$V = \langle (1,3,-1), (4,1,0), (-2,5,-2), (3,-2,1) \rangle$$

(a) Si determini una base per V.

(b) Si completi la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^3$, sia usando il Teorema dello scambio, che usando le equazioni cartesiane di V.

$$V = \langle \underset{v_1}{(1,3,-1)}, \underset{v_2}{(4,1,0)}, \underset{v_3}{(-2,5,-2)}, \underset{v_4}{(3,-2,1)} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ BASTANO SOLAMENTE v_1, v_2

$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ È BASE DI V

b) PRENDO $\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 = 1 \cdot e_1 + 3e_2 - e_3$

$\Rightarrow e_1 = -3e_2 + e_3 + v_1$

$\Rightarrow B' = \{e_2, e_3, v_1\}$

$v_2 = \alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$$\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases}\gamma = 4\\ \alpha+3\gamma = 1\\ \beta-\gamma = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma = 4\\ \alpha = -11\\ \beta = 4\end{cases}$$

$v_2 = -11\, e_2 + 4 e_3 + 4 v_1$

$\Rightarrow$ ISOLO e_3 E QUINDI $B'' = \{v_2, v_1, e_2\}$

VERIFICO L.I: $\alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma e_2 = (0,0,0)$

$$\begin{cases}4\alpha+\beta = 0\\ \alpha+3\beta+\gamma = 0\\ -\beta = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0\\ \gamma = 0\end{cases} \checkmark$$

EQ. CARTESIANE

SCRIVO UN GENERICO VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ COME SOMMA DI v_1 e v_2

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+4\beta = x\\ 3\alpha+\beta = y\\ -\alpha = z\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-z+4\beta = x\\ -3z+\beta = y\\ \alpha = -z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4\beta = x+z\\ \beta = y+3z\\ \alpha = -z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4y+12z = x+z\\ \text{"}\\ \text{"}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-x+4y+11z = 0\\ \text{"}\\ \text{"}\end{cases}$$

BASTA SCEGLIERE UN VETTORE (x,y,z) T.C. $-x+4y+11z \neq 0$ (COSÌ È L.I!)

ESEMPIO: $(1,0,0) \Rightarrow (v_1, v_2, e_1)$ È BASE!

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$X = \{2+i\} \quad Y = \{1+i, 1-i\}$$

Si giustifichi se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) L'insieme X è una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.
(b) L'insieme Y è una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.
(c) L'insieme X è una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
(d) L'insieme Y è una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{\in \mathbb{C}/\mathbb{R}}$

$(2+i)\cdot \underset{\in\mathbb{C}}{\alpha} = \dots$

$(2+i)\cdot \underset{\in\mathbb{R}}{\alpha} = \mathbb{C}$

$\alpha(1+i) + \beta(1-i) = \mathbb{C}$

$\in\mathbb{R}$

$1\cdot \overset{\in\mathbb{C}}{\alpha} = \mathbb{C}$

$X = \{1\}$

$(2+i)\cdot\alpha = 5+\sigma i$

$\alpha = \dfrac{5+\sigma i}{2+i}$

$X = \{2+i\}, \ Y = \{1+i, 1-i\}$

a) X BASE DI $\mathbb{C}$ SU $\mathbb{C}$: $\quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

UNA BASE DI $\mathbb{C}$ SU $\mathbb{C}$ HA UN SOLO ELEMENTO: DATO UN EL. IN $\mathbb{C}$ SE LO MOLTIPLICO PER UN NUMERO IN $\mathbb{C}$ OTTENGO UN QUALSIASI NUMERO IN $\mathbb{C}$.

$\{2+i\}$ È QUINDI UNA BASE DI $\mathbb{C}$ SU $\mathbb{C}$

b) Y NO! INFATTI UNA BASE DI $\mathbb{C}$ SU $\mathbb{C}$ DEVE AVERE SOLAMENTE UN ELEMENTO (RICORDATE CHE UNA BASE È UN INS. DI GEN. MINIMALE)

c) FALSO! PER ESEMPIO $(2+i)\cdot x = 3$ NON HA SOLUZIONE IN QUANTO $x \in \mathbb{R}$. IN GENERALE SE MOLTIPLICO $2+i$ PER UN QUALSIASI NUMERO REALE $\neq 0$ NON RIESCO AD OTTENERE UN NUMERO REALE, QUINDI X NON GENERA $\mathbb{C}$

d) VERO! UNA BASE SU $\mathbb{R}$ DI $\mathbb{C}$ È $\{1, i\}$ ($\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$). DI CONSEGUENZA QUALSIASI COPPIA DI VETTORI LIN. IND. SU $\mathbb{R}$ È UNA BASE DI $\mathbb{C}$ (QUESTA È ANCHE UNA SPIEGAZ. ALTERNATIVA AL PUNTO c.)

VERIFICHIAMO CHE $1+i$ e $1-i$ SIANO LIN. INDIP.

NOTO CHE $(1+i)(-i) = 1-i$ MA $-i \notin \mathbb{R}$ QUINDI $1+i$ e $1-i$ SONO LIN. INDIP E Y È UNA BASE DI $\mathbb{C}$.

5. * In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \langle(1,2,3,4),(2,2,2,6),(0,2,4,4)\rangle \quad V = \langle(1,0,-1,2),(2,3,0,1)\rangle.$$

Si determinino basi per U, V, $U \cap V$ e $U+V$.

RICORDATE: $U \cap V$ SONO I VETTORI IN COMUNE TRA I DUE INSIEMI

INVECE SE $U = (u_1 \dots u_n)$, $V = (v_1, \dots, v_m)$

ALLORA $U+V = (u_1 \dots u_n, v_1, \dots, v_m)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 3 \text{ COLONNE L.I}$$

$\Rightarrow \dim(U) = 3$. BASE: TUTTO U

$\Rightarrow \dim(U) = 3$. BASE: TUTTO U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{CHIARAMENTE L.I} \Rightarrow \text{BASE: TUTTO } V$$

$$U + V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 4 COLONNE LIN. INDIP

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3, u_2)$ BASE DI $U+V$