ESERCIZI VARI PRESI DA "ALGEBRA E GEOMETRIA LINEARE" DEL PROFESSOR BOTTACIN

Esercizio 1.1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (0, 2, 0, -1)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 0)$. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$. /

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

GRASSMAN: $\mathrm{Dim}(U+V) = \mathrm{Dim}\,U + \mathrm{Dim}\,V - \mathrm{Dim}(U \cap V)$

$$U = \langle \overset{u_1}{(0,2,0,-1)}, \overset{u_2}{(1,1,1,0)} \rangle. \quad V = \begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

EVIDENTEMENTE u_1 E u_2 SONO LIN. INDIP.

GENERICO VETTORE DI U: $u = a u_1 + b u_2 = a(0,2,0,-1) + b(1,1,1,0)$

$$= (b, 2a+b, b, -a)$$

PER $U \cap V$ PRENDO UN VETT. DI U GENERICO E PONGO CHE RISPETTI LE EQ. DI V:

$$V = \begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + b = 2a + b - a \\ b - a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 2b \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = b \\ a = b \end{cases} \rightsquigarrow \text{TUTTI I VETT. CON } a = b$$

SONO IN $U \cap V$: $(a, 3a, a, -a) = a(1,3,1,-1)$

$U \cap V = \langle (1,3,1,-1) \rangle \Rightarrow Dim(U \cap V) = 1$

PER $U+V$ INIZIO TROVANDO UNA BASE PER V:

$$V = \begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = x_2 + x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$$(x_2 + 2x_4, x_2, -x_4, x_4)$$

$$\hookrightarrow x_2 (1,1,0,0) + x_4 (2,0,-1,1)$$

$$\Rightarrow V = \langle \underset{v_1}{(1,1,0,0)}, \underset{v_2}{(2,0,-1,1)} \rangle$$

DA GRASSMAN: $Dim(U+V) = Dim(U) + Dim(V) - Dim(U \cap V)$
$= 2 + 2 - 1 = 3$

CONSIDERO $\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{G-J}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U+V = \langle (1,0,0,\tfrac{1}{2}), (0,1,0,-\tfrac{1}{2}), (0,0,1,0) \rangle \checkmark$$

DISCUTERE, IN FUNZIONE DI $a \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA:

DISCUTERE, IN FUNZIONE DI $a \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+(2-a)z=a+5 \\ x+ay+2z=4 \\ x+(a-2)y+(2-2a^2)z=0 \end{cases}$$

(USARE ROUCHÉ-CAPELLI)

ROUCHÉ-CAPELLI: SIA $A=(A'|b)$ LA MAT. DI UN SISTEMA DI m INCOGNITE ED n EQ

- IL SISTEMA HA SOL. SSE $rk(A'|b)=rk A$
- SONO INFINITE SE $rk(A'|b)=rk A<n$
- E' UNICA SE $rk(A'|b)=rk A=n$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 1 & a & 2 & 4 \\ 1 & a-2 & 2-2a^2 & 0 \end{array}\right)$$

USO GAUSS-JORDAN

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & 1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 2(a-a^2) & -2a \end{array}\right) = A$$

ORA: SE $2(a-a^2)=0 \iff a=0 \vee a=1$

TRE CASI: $a=0$, $a=1$, $a\neq 0,1$

$a=0$:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}\left|\begin{matrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow Rk(A) = Rk(A') = 2$$
$\Rightarrow$ INFINITE SOL.

$a=1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} Rk(A') = 2 \\ Rk(A) = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{NO SOL.}$$

$\left.\begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & 1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 2(a-a^2) & -2a \end{array}\right)$$
PROSEGUO CON GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & 1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Rk(A') = 3 = Rk(A) \Rightarrow$ 1 SOLA SOLUZIONE!

7. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (2x+3y, x, 2-x)$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) = (2x, x, y-x)$$
$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x,y) = (xy, y, x)$$
$$k\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad k(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-2z)$$
$$m\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad m(x,y,z) = (2x-y+z, x-z, 2y+z)$$
$$n\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{\cancel{2}\,3}, \quad n(x,y,z) = (1, x, y)$$

(a) Per ognuna delle funzioni si determini se la funzione è lineare.

(b) Per ogni funzione lineare trovata, si indichi se è un isomorfismo o no.

RICORDO: f È LINEARE SE: $f(\lambda v+\mu u)=\lambda f(v)+\mu f(u)$

(EQUIV.: $f(\lambda v)=\lambda f(v)$ e $f(v+u)=f(v)+f(u)$)

CON λ, μ SCALARI, a, b VETTORI

PER ESSERE UN ISOMORFISMO LA FUNZIONE DEVE ESSERE:

- LINEARE
- INIETTIVA ($f(a)=f(b) \Leftrightarrow a=b$)
- SURIETTIVA (OGNI ELEMENTO HA UNA PREIMMAGINE)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x,y)=(2x+3y, x, 2-x)$

LINEARE: $f(\lambda(x,y))= f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x+3\lambda y, \lambda x, 2-\lambda x)$

$\neq \lambda(2x+3y, x, 2-x)$ NO LIN!

$g(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y) = (2x, x, x-y)$

$f(\lambda(x,y)) = (2\lambda x, \lambda x, \lambda x-\lambda y) = \lambda(2x, x, x-y) = \lambda g(x,y)$ ✓

$f((x,y)+(a,b)) = (2(x+a), x+a, x+a-y-b)$

$= (2x+2a, x+a, (x-y)+(a-b))$

$= f(x,y)+f(a,b)$ ✓ $\Rightarrow$ È LINEARE

$f(x,y) + f(a,b)$

$\shortparallel \qquad \shortparallel$

$(2x, x, x-y)\ (2a, a, a-b)$

INIETTIVA: $f(v)=f(u) \Leftrightarrow v=u$

$g(x,y)=g(a,b) \Leftrightarrow (2x, x, x-y)=(2a, a, a-b)$

$f(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (2x, x, x-y) = (2a, a, a-b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2a \\ x = a \\ x-y = a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \cancel{a} - y = \cancel{a} - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (a,b) \checkmark$$

SURIETTIVA: UN GENERICO VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME $(2x, x, x-y)$?

NO! BASTA PRENDERE $(0,1,2)$

$\Rightarrow$ NON È UN ISOM!

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x,y) = (xy, y, x)$

LIN: $h(\lambda(x,y)) = (\lambda x \lambda y, \lambda y, \lambda x) = (\lambda^2 xy, \lambda y, \lambda x) \neq$

$\neq \lambda(xy, y, x)$ NO!

$k: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad k(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-2z)$

$k(\lambda(x,y,z)) = (\lambda x + \lambda y - \lambda z, 2\lambda x + 2\lambda y - 2\lambda z)$

$= \lambda(x+y-z, 2x+2y-2z) = \lambda k(x,y,z) \checkmark$

$k((x,y,z)+(a,b,c)) =$

$= ((x+a)+(y+b)-(z+c), 2(x+a)+2(y+b)-2(z-c))$

$$= \big((x+y-z)+(a+b-c), (2x+2y-2z)+(2a+2b-2c)\big)$$
$$= k(x,y,z)+k(a,b,c) \quad \checkmark$$

INIETTIVA: $k(x,y,z) = k(a,b,c)$

$$(x+y-z, 2x+2y-2z) = (a+b-c, 2a+2b-2c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z = a+b-c \\ 2x+2y-2z = 2a+2b-2c \quad :2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z = a+b-c \\ x+y-z = a+b-c \end{cases} \Rightarrow \text{INF. SOL} \Rightarrow \text{NO INIETTIVA!}$$

$m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $m(x,y,z) = (2x-y+z, x-z, 2y+z)$

LIN: $m(\lambda(x,y,z)) = (2\lambda x - \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda z, 2\lambda y + \lambda z)$

$$= \lambda m(x,y,z) \quad \checkmark$$

$$m\big((x,y,z)+(a,b,c)\big) = \big(2(x+a)-(y+b)+(z+c), (x+a)-(z+c), 2(y+b)+(z+c)\big) =$$

$$= \big((2x-y+z)+(2a-b+c), (x-z)+(a-c), (2y+z)+(2b+c)\big) =$$
$$= m(x,y,z)+m(a,b,c) \quad \checkmark$$

INIETT: $m(x,y,z) = m(a,b,c)$

$$(2x-y+z,\ x-z,\ 2y+z) = (2a-b+c,\ a-c,\ 2b+c)$$

$$\begin{cases} 2x-y+z = 2a-b+c \\ x-z = a-c \\ 2y+z = 2b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-2a)-(y-b)+(z-c)=0 \\ (x-a)-(z-c)=0 \\ (2y-2b)+(z-c)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} * \\ x-a = z-c \\ 2y-2b = -(z-c) = -(x-a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x-a)-\frac{1}{2}(x-a)+(x-a)=0 \\ * \\ * \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a \\ z=c \\ y=b \end{cases}$$

SURIETTIVA: POSSO SCRIVERE UN GENERICO VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ (a,b,c) COME $(2x-y+z,\ x-z,\ 2y+z)$?

$$\begin{cases} 2x-y+z = a \\ x-z = b \\ 2y+z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+z-a \\ x = b+z \\ z = c-2y \end{cases}$$

FISSATI a, b, c POSSO SEMPRE TROVARE (x, y, z)
T.C. LA SUA IMMAGINE SIA (a, b, c)

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \to (1, x, y)$

$$h(\lambda(x, y, z)) = (1, \lambda x, \lambda y) \neq \lambda h(x, y, z) \quad \text{NO!}$$