2. Si considerino le seguenti matrici

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1&-3\\0&1&1&-2\\-2&2&-1&-6\\3&1&1&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&0&3&-1\\4&1&2&0\\0&3&0&1\\2&0&2&-1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&3&4&-1&2\\2&3&4&-1&1\\2&3&5&1&1\\2&1&1&1&1\\1&2&-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&2\end{pmatrix}$$

(a) Si scriva l'espressione generale (ovvero $\varphi(x,y,z)=?$) della funzione $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per cui la matrice $A = {}_{can}M_{can}(\varphi)$.

(b) Si scriva anche l'espressione generale delle funzioni associate a B, C, D e E (rispetto alle basi canoniche).

(c) Si calcolino i prodotti EA; BC; D^2.

DATA UNA MATRICE $n\times m$ $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&\ddots&&\\\vdots&&\ddots&\\a_{n1}&&&a_{nm}\end{pmatrix}=A$ L'ESPRESSIONE GENERALE DELLA FUNZIONE È $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(2x+y+3z,\,-x+2y+z,\,0)$

b) B: $\begin{pmatrix}1&2&1&-3\\0&1&1&-2\\-2&2&-1&-6\\3&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(x+2y+z-3t,\,y+z-2t,\,-2x+2y-z-6t,$
$3x+y+z+t)$

C: $\begin{pmatrix}2&0&3&-1\\4&1&2&0\\0&3&0&1\\2&0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(2x+3z-t,\,4x+y+2z,\,3y+t,\,2x+2z-t)$

D: $\begin{pmatrix}2&3&4&-1&2\\2&3&4&-1&1\\2&3&5&1&1\\2&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(2x+3y+4z-t+2w,\,2x+3y+4z-t+w,$
$2x+3y+5z+t+w,\,2x+y+z+t+w,$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \\ w \end{pmatrix} \quad 2x+3y+5z+t+w,\ 2x+y+z+t+w,\ x+2y-z+2t-w)$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+z,\ 3x-y+2z)$$

c) $$FA: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -8 & -1 & -14 & -3 \\ 12 & 4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D^2: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 30 & 37 & -2 & 8 \\ 17 & 28 & 36 & -3 & 7 \\ 21 & 32 & 43 & 1 & 7 \\ 11 & 14 & 17 & -1 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Torniamo ad un esercizio precedente. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(1,1,0,0) = (3,1,2)$, $f(1,0,1,0) = (2,0,2)$, $f(0,1,0,0) = (-1,-2,1)$ e $f(0,0,1,1) = (1,-1,2)$.

   (a) Si verifichi che i vettori di $\mathbb{R}^4$ elencati costituiscono una base, che chiameremo B.

   (b) Si scriva l'espressione generale della funzione lineare f per un vettore (x,y,z,t).

   (c) Si scriva la matrice di f rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica nel codominio.

   (d) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base B alla base canonica in $\mathbb{R}^4$.

   (e) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base canonica alla base B in $\mathbb{R}^4$.

   (f) Si usi la formula del cambio di base per calcolare la matrice di f rispetto alle base canoniche sia nel dominio che nel codominio.

FORMULA CAMBIO BASE: $${}_C M_{B'}(f) = {}_C M_C(id) \cdot {}_C M_B(f) \cdot {}_B M_{B'}(id)$$

$$({}_C M_B^{-1}) = {}_B M_C$$

a) $B = \{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$

$(C \cdots B \quad B \cdots C$

a) $B = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \text{ PIVOT} \Rightarrow \text{BASE} \checkmark$$

b) BISOGNA TROVARE LE IMMAGINI DELLA BASE CANONICA

$e_1 = (1,1,0,0) - (0,1,0,0)$. USANDO LA LINEARITÀ

$$f(e_1) = f(1,1,0,0) - f(0,1,0,0) = (3,1,2) - (-1,-2,1)$$
$$= (4,3,1)$$

$$f(e_2) = f(0,1,0,0) = (-1,-2,1)$$

$$f(e_3) = f((1,0,1,0) - e_1) = (2,0,2) - (4,3,1)$$
$$= (-2,-3,1)$$

$$f(e_4) = f((0,0,1,1) - e_3)) = (1,-1,2) - (-2,-3,1)$$
$$= (3,2,1)$$

$$f(x,y,z,t) = x(4,3,1) + y(-1,-2,1) + z(-2,-3,1) + t(3,2,1)$$
$$= (4x - y - 2z + 3t,\ 3x - 2y - 3z + 2t,\ x + y + z + t)$$

c) $^{CAN}M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) M HA COME COLONNE I VETTORI DI B ESPRESSI NELLA BASE CANONICA

d) ${}_{CAN}M_{B}$ HA COME COLONNE I VETTORI DI B ESPRESSI NELLA BASE CANONICA OVVERO QUELLI CHE MI DÀ IL TESTO!

$$ {}_{CAN}M_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

e) ${}_{B}M_{CAN}$ HA COME COLONNE I VETTORI DELLA BASE CANONICA ESPRESSI NELLA BASE B

POSSIAMO ESPLICITAMENTE TROVARCI LA COMB. LINEARE OPPURE NOTIAMO CHE ${}_{B}M_{CAN} = \left({}_{CAN}M_{B}\right)^{-1}$

PROCEDIAMO CON IL CALCOLO DELL'INVERSA: COME FACCIO?

PER CALCOLARE L'INVERSA DI ${}_{CAN}M_{B}$ SCRIVO $\left({}_{CAN}M_{B} \mid id\right) =$

$$ = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{{}_{CAN}M_{B}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{id_4} \right). $$

APPLICANDO GAUSS-JORDAN VOGLIO FAR SPUNTARE L'IDENTITÀ A SX DELLA LINEA. QUELLO CHE OTTENGO A DX SARÀ L'INVERSA CERCATA!

$$ \overset{G}{\rightsquigarrow} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{\left({}_{CAN}M_{B}\right)^{-1} = \boxed{{}_{B}M_{CAN}\,!}} \right) \Rightarrow {}_{B}M_{CAN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} $$

f) VOGLIO ${}_{CAN}M_{CAN}(f)$. DALLA FORMULA DI CAMBIO

f) VOGLIO ${}_{CAN}M_{CAN}(f)$. DALLA FORMULA DI CAMBIO BASE: ${}_{CAN}M_{CAN}(f) \overset{*}{=} {}_{CAN}M_B(f) \cdot \boxed{{}_B M_{CAN}(id)}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* LA FORMULA COMPLETA SAREBBE ${}_{CAN}M_{CAN}(f) = {}_{CAN}M_{CAN}(id) \cdot {}_{CAN}M_B(f) \cdot {}_B M_{CAN}(id)$

MA ${}_{CAN}M_{CAN}(id)$ È L'IDENTITÀ!

DALLA SIMULAZIONE DEL 3° COMPITINO DELL'ANNO SCORSO

3. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e si consideri l'unica funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per cui $f(1,1,1) = (1,5,1)$, $f(1,1,0) = (1,4,-1)$, $f(1,0,0) = (2,3,-1)$

   (a) Si determinino le matrici di cambio di base ${}_{\mathrm{can}}A_{\mathcal{B}}$ e ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathrm{can}}$.

   (b) Si determini la matrice $M := {}_{\mathrm{can}}M_{\mathrm{can}}(f)$ associata alla funzione f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (c) La funzione f è invertibile? In caso positivo, si trovi l'espressione della funzione inversa (cioè, $f^{-1}(x,y,z) = ???$).

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$f(1,1,1) = (1,5,1)$; $f(1,1,0) = (1,4,-1)$, $f(1,0,0) = (2,3,-1)$

a) ${}_{CAN}A_B$: SONO I VETTORI DI B SCRITTI IN BASE CANONICA (COSÌ COME CI VENGONO DATI!)

$${}_{CAN}A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ {}_B A_{CAN} = \left({}_{CAN} A_B\right)^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) $$

$$ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\left({}_{CAN}A_B\right)^{-1}} $$

$$ \Rightarrow {}_B A_{CAN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} $$

b) DALLA FORMULA DI CAMBIO BASE:

$$ {}_{CAN}M_{CAN}(f) = {}_{CAN}M_B(f) \cdot {}_B A_{CAN} $$

$\Downarrow$

HA PER COLONNE LE IMM. DEI VETTORI DELLA BASE B

$$ {}_{CAN}M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad {}_B A_{CAN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{CAN}M_B(f) \cdot {}_B A_{CAN} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} $$

c) PER VEDERE SE È INVERTIBILE HO 2 OPZIONI:

- VERIFICO ESPLICIT. SUR. + INIETTIVITÀ (LUNGO!)
- VERIFICO SE $M = {}_{CAN}M_{CAN}(f)$ È INVERTIBILE

PROVO A CALCOLARE ESPLICIT. L'INVERSA DI M!

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{G} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) $$

E COMPLETANDO (DIVIDO R_3 PER 11)

$$ M^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} $$

$$M^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

QUINDI $f^{-1}(x,y,z) = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{11}\cdot\left(2x+2y-z,\ -7x+4y-2z,\ x+y+5z\right)$$