

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

7
$$f(x, y, z, t) = (3x - y + z - 2t, y + 5z - t, -x - 2z + t).$$

- Si scriva la matrice A associata alla funzione f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.
- Si calcoli il rango di A .
- La funzione f è suriettiva? Si giustifichi la risposta.
- Quante soluzioni ha il sistema $f(x, y, z, t) = (2, 3, -1)$? Si giustifichi la risposta.
- I vettori colonna di A generano $\mathbb{R}^3$? In caso negativo, si trovi un complemento di $\text{Im}(f)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice A_α in $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definita da

2
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante, si determinino gli autovalori di A_α , al variare di α .
- Per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.
- Si consideri $\alpha = 0$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A_0 ? In caso affermativo si trovi una tale base.

Esercizio 4. Dato α in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice A_α in $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ definita da

3
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini per quali valori di α la matrice A_α ha rango 4.
- Consideriamo la matrice A_2 , cioè, la matrice A_α con $\alpha = 2$.
 - Si determini una base per l'immagine della funzione lineare associata ad A_2 .
 - Si determini se il sistema di equazioni

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni.

- Per quali valori di α il sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni?

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk} = 2$$

$\text{rk} = 2 \Rightarrow \dim(\text{Im}) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. NON È SURIETTIVA

MAT COMPLETA: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

DA ROUGH-CAPPU IL SISTEMA NON HA SOLUZIONE

I VETTORI COLONNA DI A NON POSSONO GENERARE $\mathbb{R}^3$ PERCHÉ $\dim(\text{Im } f) = 2$

UN COMPLEMENTO È $(1, 0, 0)$ (È LIN. INDIP. DALLE COLONNE DI A)

$$2) \text{DET} \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & \alpha - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

PER CUI: $\lambda = \alpha, \lambda = -1, \lambda = 2$

• SE $\alpha \neq -1, \neq 2$ CI SONO 3 AUTOVAL. DISTINTI QUINDI È DIAG.

• SE $\alpha = -1, m_{-1}(-1) = 2. m_{-1}(-1):$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow m_y(-1) = 1$$

MA Allora $m_y(-1) + m_y(2) = 2 \neq 3 \Rightarrow$ NON DIAG.

$$\bullet \text{ Se } \alpha = 2, m_y(2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow m_y(2) = 1 \Rightarrow$ NON e' DIAG.

$\alpha = 0 \Rightarrow A$ e' DIAG. $\Rightarrow$ ESISTE BASE DI AUTOVETTORI

ABBIAMO GIÀ $N_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$N_0: \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \stackrel{= N_0}{=} \Rightarrow \langle N_0, N_{-1}, N_2 \rangle \text{ BASE DI AUT.}$$

$$3) A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{RK} = 4 \Leftrightarrow \det \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$$

(OPPURE GAUSS)

$$\text{PER } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{RK} = 3$$

BASE PER L'IMMAGINE: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = I_m$

$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ HA SOL SSE $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in I_m$

MA: $\begin{cases} 2a + b + c = 1 \\ 2b + 2c = 1 \\ -a + 2c = -1 \\ 2c = -1 \end{cases}$ NON HA SOL $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin I_m$.

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ PER $\alpha = 2$ HO VISTO CHE NON HA SOL.
 PER $\alpha \neq 2 \Rightarrow \text{rk } A_\alpha = 4 \Rightarrow I_m = \mathbb{R}^4$
 QUINDI SICURAMENTE $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in I_m$

$\Rightarrow$ HO SEMPRE SOLUZIONI

OPPURE, BANALMENTE, $A_\alpha, \alpha \neq 2$ È INVERTIBILE E QUINDI: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$