Exercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono lineari, e in questo caso dire se sono isomorfismi.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a, b, c) = (2ab, c)$.
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a, b, c) = (a - b, c)$.
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (2x - y, x - z, \overset{y}{\cancel{w}} + z)$.

RICORDO: f È LINEARE SE: $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$
(EQUIV.: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ e $f(v+w) = f(v) + f(w)$)
CON λ, μ SCALARI, a, b VETTORI
PER ESSERE UN ISOMORFISMO LA FUNZIONE DEVE ESSERE:
- LINEARE
- INIETTIVA ($f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$)
- SURIETTIVA (OGNI ELEMENTO HA UNA PREIMMAGINE)

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \longmapsto (2ab, c)$

- LINEARITÀ: $f(\lambda(a,b,c)) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$
$= (2\lambda^2 ab, \lambda c) \neq \lambda f(a,b,c)$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \quad \parallel$
$\qquad \qquad \qquad \quad (2\lambda ab, c)$

$\Rightarrow$ NON È LIN. (E QUINDI NEANCHE UN ISO.)

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \longmapsto (a - b, c)$

- LINEARITÀ: • $f(\lambda(a,b,c)) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$
$= (\lambda a - \lambda b, \lambda c) = \lambda(a - b, c) = \lambda f(a,b,c)$ ✓

• $f((a,b,c) + (e,f,g)) = f(a+e, b+f, c+g)$
$= ((a+e) - (b+f), c+g) = ((a-b) + (e-f), c+g)$
$= f(a,b,c) + f(e,f,g)$ ✓ $\qquad$ $f(e,f,g)$

$$= f(a,b,c) + f(e,f,g) \checkmark \qquad f(a,b,c) \qquad f(e,f,g)$$

• INIETTIVITÀ: $f(a,b,c) = f(e,f,g)$

$$\Rightarrow (a-b, c) = (e-f, g)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = e-f \\ c = g \end{cases} \Rightarrow \text{NON È DETTO CHE } a=e,\ b=f!$$

$(ES: a=2, b=1, e=4, f=3)$

NOTA: UNA FUNZIONE PUÒ ESSERE UN ISOMORFISMO SOLO SE IL DOM. ED IL COD. HANNO LA STESSA DIM.!

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (2x-y, x-z, y+z)$

LINEARITÀ: • $f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) =$

$$= (2x\lambda - y\lambda,\ x\lambda - z\lambda,\ y\lambda + z\lambda)$$

$$= (\lambda(2x-y),\ \lambda(x-z),\ \lambda(y+z)) = \lambda f(x,y,z) \checkmark$$

• $f((x,y,z) + (a,b,c)) = f((x+a, y+b, z+c))$

$$= (2(x+a) - (y+b),\ (x+a) - (z+c),\ (y+b) + (z+c))$$

$$= ((2x-y) + (2a-b),\ (x-z) + (a-c),\ (y+z) + (b+c))$$

$$= f(x,y,z) + f(a,b,c) \checkmark$$

• INIETTIVITÀ: $f(x,y,z) = f(a,b,c)$ VOGLIO $x=a,\ y=b,\ z=c$

$$\Rightarrow (2x-y, x-z, y+z) = (2a-b, a-c, b+c)$$

$$\begin{cases} 2x-y = 2a-b \\ x-z = a-c \\ y+z = b+c \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} 2x-y = 2a-b \\ x+y = a+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z=a-c \\ y+z=b+c \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} x+y=a+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-a-\cancel{b}+x=2a-\cancel{b} \Rightarrow 3x=3a \Rightarrow x=a \\ y=a+b-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=a+b-x=\cancel{x}+b-\cancel{x} \Rightarrow y=b$$

$$\Rightarrow y+z=b+c \Rightarrow \cancel{b}+z=\cancel{b}+c \Rightarrow z=c$$

QUINDI $a=x,\ b=y,\ c=z \Rightarrow$ INIETTIVA!

SURIETTIVA: PRESO UN GENERICO VETTORE (a,b,c) POSSO TROVARE UN VETTORE (x,y,z) T.C. $f(x,y,z)=(a,b,c)$?

SÌ, BASTA PORRE: $\begin{cases} 2x-y=a \\ x-z=b \\ y+z=c \end{cases}$ (SEMPRE SOLUZIONE)

Exercizio 2. Sia $V = \{a + bX + cX^2 + dX^3 | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ il sottoinsieme dell'insieme dei polinomi in una variabile X a coefficienti in $\mathbb{R}$. Definiamo una somma di due elementi di V tramite la formula

$$(a_1 + b_1X + c_1X^2 + d_1X^3) + (a_2 + b_2X + c_2X^2 + d_2X^3) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2)X^2 + (d_1 + d_2)X^3.$$

Definiamo inoltre un prodotto di uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ per un elemento $v = a + bX + cX^2 + dX^3$ tramite la formula

$$\lambda v = (\lambda a) + (\lambda b)X + (\lambda c)X^2 + (\lambda d)X^3.$$

Mostrare che V con le due operazioni descritte sopra è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che la funzione $f : V \to \mathbb{R}^4$ che manda un vettore $v = a + bX + cX^2 + dX^3$ di V nel vettore (a, b, c, d) di $\mathbb{R}^4$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

RICORDO: V È SPAZIO VETTORIALE SU K SE: $v+w \in V\ \forall v,w \in V$

$\lambda v \in V\ \forall v \in V, \forall \lambda \in K$

V È SPAZIO VETTORIALE: • SOMMA DI DUE POLINOMI DI GRADO AL MAX TRE È POL. DI GRADO AL MASSIMO TRE ✓

• MOLTIPLICARE UN POLINOMIO DI GRADO AL MAX TRE PER UNO SCALARE (UN NUMERO) LO FA RIMANERE UN POL. DI GRADO AL MAX 3. ✓

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (\overbrace{a+bx+cx^2+dx^3}^{P}) \longmapsto (a,b,c,d)$$

È LINEARE: • $f(\lambda P) = f(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2 + \lambda dx^3) =$
$= (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda f(P)$ ✓

• $f((\underbrace{a+bx+cx^2+dx^3}_{P}) + (\underbrace{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}_{Q}))$
$= f((a+a') + (b+b')x + (c+c')x^2 + (d+d')x^3) =$
$= (a+a', b+b', c+c', d+d') = f(P) + f(Q)$ ✓

• INIETTIVA: $f(a+bx+cx^2+dx^3) = f(a'+b'x+c'x^2+d'x^3)$
$\iff a=a', b=b', c=c', d=d'$

OVVIO: AVRÒ $f(a+bx+cx^2+dx^3) = (a,b,c,d)$
$f(a'+b'x+c'x^2+d'x^3) = (a',b',c',d')$

e $(a,b,c,d) = (a',b',c',d')$
$\iff a=a', b=b', c=c', d=d'$ ✓

SURIETTIVA: AD OGNI QUATERNA (a,b,c,d) POSSO ASSOCIARE IL POL. $a+bx+cx^2+dx^3$ SENZA PROBLEMI. ✓

$\Rightarrow f$ È ISOMORFISMO.

PER ESERCITARSI: (PRESO DA UNA SCHEDA DI ESERCIZI DELL'ANNO PRECEDENTE)

PRECEDENTE)

7. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (2x+3y, x, 2-x)$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) = (2x, x, y-x)$$
$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x,y) = (xy, y, x)$$
$$k\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad k(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-2z)$$
$$m\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad m(x,y,z) = (2x-y+z, x-z, 2y+z)$$
$$n\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad n(x,y,z) = (1, x, y)$$

(a) Per ognuna delle funzioni si determini se la funzione è lineare.

(b) Per ogni funzione lineare trovata, si indichi se è un isomorfismo o no.

3. Si consider $V = \mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Ricordiamoci che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Si consideri la funzione $\phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\phi(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{im}(z))$, dove $\mathrm{Re}(z)$ è la parte reale di z e $\mathrm{Im}(z)$ è la parte immaginaria di z.

(a) Si dimostri che ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \ \phi(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$

- LINEARITÀ: $\phi(\lambda z) = \phi(\lambda(a+ib)) = \phi(\lambda a + i\lambda b) =$

$= (\lambda a, \lambda b) = \lambda (a, b) = \lambda f(z)$

$$\phi((a+ib)+(c+id)) = \phi((a+c)+i(b+d))$$
$$= (a+c, b+d) = \phi(a+ib)+\phi(c+id)$$

✓

INIETTIVITÀ: $\phi(a+ib) = \phi(c+id) \Leftrightarrow a+ib = c+id$

$$\begin{array}{l} \phi(a+ib) = (a,b) \\ \phi(c+id) = (c,d) \end{array} \Rightarrow (a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=c \\ d=b \end{array}$$

$$\Rightarrow a+ib = c+id$$ ✓

SURIETTIVITÀ: DATA UNA QUALSIASI COPPIA DI NUMERI REALI (a,b) POSSO SCEGLIERE UN NUMERO COMPLESSO $a+ib$ SENZA PROBLEMI ✓

$\Rightarrow \phi$ È UN ISO!