07/05/26

giovedì 7 maggio 2026 09:48

10. (a) Si dimostri che $\mathcal{B} := \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,-1,0),(1,1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

[1] Si dimostri che "Se (1), allora (2)", che "Se (2), allora (3)" e che "Se (3) allora (1)"

/

(b) Si trovi l'espressione generale della funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ unicamente definita dalle proprietà

$$f(1,0,0,0) = (2,0,1) \qquad f(1,1,0,0) = (1,1,1)$$
$$f(1,1,-1,0) = (0,0,-1) \qquad f(1,1,1,-1) = (2,0,-2)$$

(c) Si dimostri che $\mathcal{C} := \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(d) Si considerino le basi canoniche can_4 di $\mathbb{R}^4$ e can_3 di $\mathbb{R}^3$. Si calcolino le seguenti matrici.

i. ${}_{\mathrm{can}_3}M_{\mathcal{B}}(f)$

ii. ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$

iii. ${}_{\mathrm{can}_3}M_{\mathrm{can}_4}(f)$

iv. ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathrm{can}_4}(f)$.

IN CHE BASE VOGLIO LE IMM. CALCOLATE

VETTORI DI CUI DEVO CALCOLARE L'IMMAGINE

${}_{B'}M_B$

È MATRICE DI CAMBIO BASE DA B A B'

a) $B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,-1,0),(1,1,1,-1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ GIÀ 4 PIVOT! $\Rightarrow$ È UNA BASE.

b) $f(1,0,0,0) = (2,0,1)$, $f(1,1,0,0) = (1,1,1)$, $f(1,1,-1,0) = (0,0,-1)$, $f(1,1,1,-1) = (2,0,-2)$

$f(e_1) = (2,0,1)$.

$e_2 = (1,1,0,0) - e_1 \Rightarrow f(e_2) = (1,1,1) - (2,0,1) = (-1,1,0)$

$e_3 = (1,1,0,0) - (1,1,-1,0) \Rightarrow f(e_3) = (1,1,1) - (0,0,-1) = (1,1,2)$

$e_4 = (1,1,0,0) + e_3 - (1,1,1,-1) \Rightarrow f(e_4) = (1,1,1) + (1,1,2) - (2,0,-2) =$

$= (0,2,5)$

$$f(x) = x(2,0,1) + y(-1,1,0) + z(1,1,2) + t(0,2,5)$$
$$= (2x - y + z,\ y + z + 2t,\ x + 2z + 5t) \quad \checkmark$$

c) $C = \{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{G}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 3 PIVOT $\Rightarrow$ È BASE.

d) ${}_{CAN_3}M_B$: ABBIAMO GIÀ LE IMMAGINI!

↳ GIÀ SCRITTE IN BASE CANON.

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

${}_C M_B(f) =$ LE IMMAGINI DI B CE LE ABBIAMO

$\{(2,0,1), (1,1,1), (0,0,-1), (2,0,2)\}$

ORA DEVO SCRIVERLE COME COMB. LIN. DI

$C = \{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$

RISOLVO: $(2,0,1) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$

$$\begin{cases} 2 = a - c \\ 0 = b \\ 1 = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a - 1 + a \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ b = 0 \\ c = 1 - a \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2,0,1)_{CAN} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)_C$$

$$(1,1,1) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$$

NOTO: $(1,0,1) + (0,1,0) = (1,1,1) \Rightarrow (1,1,1)_{CAN} = (1,1,0)_C$

$$(0,0,-1) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$$

NOTO: $-\frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1) = (0,0,-1)$

$$\Rightarrow (0,0,-1) \underset{CAN}{=} \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)_C$$

$$(2,0,-2) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$$

$a = b = 0$ e $c = -2$ CHIARAMENTE

$$\Rightarrow (-1,0,1) \underset{CAN}{=} (0,0,-2)_C$$

$${}_C M_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$${}_{CAN_3} M_{CAN_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

AVEVO GIÀ TROVATO LE IM. DEI VETT. DELLA BASE CANONICA!

${}_C M_{CAN_4}$: LE IM. DEI VETT. DELLA BASE CANONICA SONO

$$\{(2,0,1), (-1,1,0), (1,1,2), (0,2,5)\}$$

DEVO SCRIVERLE IN BASE

$$C = \{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$$

$$(2,0,1) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$$

$$\begin{cases} 2 = a - c \\ 0 = b \\ 1 = a + c \end{cases} \rightsquigarrow \text{COME PRIMA: } a = \frac{3}{2} \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$(2,0,1)_{CAN_3} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)_C$$

$$(-1,1,0) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(-1,0,1)$$

$$\begin{cases} -1 = a - c \\ 1 = b \\ 0 = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -2c \Rightarrow c = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ a = -c \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (-1,1,0)_{CAN} = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

IDEM PER GLI ALTRI 2

$$\Rightarrow \quad {}_C M_{CAN_4}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

11. Sia V lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y = 0$ e sia W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 1.

(a) Si verifichi che $\mathcal{B} := \{e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}\}$ è una base di V.

(b) Si verifichi che $\mathcal{C} := \{x, 1 + x\}$ è una base di W.

(c) Si determini le coordinate di e^x e di e^{-x} rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(d) Sia $f\colon V \longrightarrow W$ la funzione che ad una soluzione di $y'' - y = 0$ della forma $k_1 e^x + k_2 e^{-x}$ associa il polinomio $k_1 + k_2 x$.

i. Si verifichi che f è lineare.

ii. Si verifichi che f è un isomorfismo.

iii. Si determini la matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

iv. Si usi ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ per calcolare le coordinate di $f(e^x)$ e di $f(e^{-x})$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

RICORDO: $f: V \to W$ $\quad N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

$\mathrm{Im}(f) := \{w \in W \mid \exists v \text{ t.c. } f(v) = w\}$

SONO SOTTOSPAZI DI V!

FORMULA DELLE DIMENSIONI: $f: V \to W$ LIN, $\dim V = n$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(N(f)) = n$

f ISO SSE È INIETT + SUR. + LIN.

INIETT $\Leftrightarrow N(f) = 0$

FORMULA DELLE DIMENSIONI: $f: V \to W$ LIN, $\dim V = n$ $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(N(f)) = n$

f ISO SSE È INIETT + SUR. + LIN.

INIETT $\Leftrightarrow N(f) = 0$

SUR $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = W$

a) VERIFICO CHE SONO LIN. INDIP. (V HA DIM 2 QUINDI OK!)

$$a(e^x - e^{-x}) + b(e^x + e^{-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a e^x - a e^{-x} + b e^x + b e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x (a+b)}_{>0} - \underbrace{e^{-x}(a-b)}_{>0} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \quad \text{OK!}$$

b) $ax + b(x+1) = \overset{\text{È IL POL. NULLO}}{0} \leftarrow$ COME POLINOMIO!

UN POLINOMIO È NULLO $\Leftrightarrow$ TUTTI I SUOI COEFF. SONO 0 $\to$ $a = 0 = b$ ✓

c) $e^x = a(e^x + e^{-x}) + b(e^x - e^{-x})$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$$

$$e^{-x} = a(e^x + e^{-x}) + b(e^x - e^{-x})$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$$

$$e^x : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\quad e^{-x} : \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

d.1) $f\big((k_1 e^x + k_2 e^{-x}) + (k_3 e^x + k_4 e^{-x})\big)$

$$f\big((k_1+k_3)e^x + (k_2+k_4)e^{-x}\big)$$

[illegible] ✓

$= k_1+k_3+(k_2+k_4)x = (k_1+k_2x)+(k_3+k_4x)$

$f(\lambda(k_1e^x+k_2e^{-x})) = \lambda k_1+\lambda k_2 x = \lambda(k_1+k_2x)$

COME POLINOMIO!

d.2) NUCLEO: $k_1+k_2x=0 \Rightarrow k_1=k_2=0$

$\Rightarrow N(f)=0 \Rightarrow$ INIETT $\Rightarrow$ SUR. $\Rightarrow$ BIIETTIVA.

$k_1e^x+k_2e^{-x}$

d.3) $f(e^x+e^{-x}) = 1+1\cdot x = 1+x$

$f(e^x-e^{-x}) = 1-1\cdot x = 1-x$

$1+x$ IN BASE $C=\{x,1+x\}$ È $(0,1)$

$1-x$ È $(-2,1)$

$$\Rightarrow {}_CM_B = \begin{pmatrix}0&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

d.4) CALCOLO ${}_CM_B\cdot f(e^x) = \begin{pmatrix}0&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

${}_CM_B\cdot f(e^{-x}) = \begin{pmatrix}0&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

☆ ALTERNATIVA: SCRIVO (x,y,z,t) COME COMB. LIN. DI B

$(x,y,z,t) = a(1,0,0,0)+b(1,1,0,0)+c(1,1,-1,0)+d(1,1,1,-1)$

RISOLVO TROVANDO a,b,c,d IN FUNZ. DI x,y,z,t

$a = x-y,\ b = y+z+2t,\ c = -z-t,\ d = -t$

APPLICO LA LIN.

NOTI

$$f(x,y,z,t) = a\,f(1,0,0,0) + b\,f(1,1,0,0) + c\,f(1,1,-1,0) + d\,f(1,1,1,-1)$$

E CONCLUDO CALCOLANDO