TUTORATO 12/19/26 MARZO IN AULA H14 DELL'HUB

TUTTI GLI ALTRI: AULA A-NASINI (LA SOLITA!)

1. La glucose ($C_6H_{12}O_6$) si bruscia reagendo con l'ossigeno (O_2) producendo acqua (H_2O) e diossido di carbonio (CO_2).
   (a) Si scriva il sistema di equazioni lineari in 4 incognite che bilancia la reazione chimica.
   (b) L'insieme delle soluzioni del sistema su $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Perchè? In caso positivo, si trovi un insieme di generatori per tale sottospazio.

$$C_6H_{12}O_6 + O_2 = H_2O + CO_2$$

$$x_1\, C_6H_{12}O_6 + x_2\, O_2 = x_3\, H_2O + x_4\, CO_2$$

È SP. VETT. PERCHÉ SIST. OMOG. DI EQ.

$$\begin{cases} 6x_1 = + x_4 \\ 12x_1 = 2x_3 \\ 6x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 6x_1 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I/6} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[III-6I]{II-6I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{8}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}x_4 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}x_4 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{8}x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \overset{x_4 = 8}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Il permanganato di potassio ($KMnO_4$) reagisce con l'acido cloridrico (HCl) producendo cloruro di potassio (KCl), cloruro manganoso ($MnCl_2$), cloro (Cl_2) e acqua (H_2O).

   (a) Si scriva il sistema di equazioni lineari in 6 incognite che bilancia la reazione chimica.

   (b) L'insieme delle soluzioni del sistema su $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^6$? Perchè? In caso positivo, si trovi un insieme di generatori per tale sottospazio.

$$x_1 KMnO_4 + x_2 HCl = x_3 KCl + x_4 MnCl + x_5 Cl_2 + x_6 H_2O$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 & K \\ x_1 - x_4 = 0 & Mn \\ 4x_1 - x_6 = 0 & O \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - \lambda_6 = 0 & O \\ \lambda_2 - 2\lambda_6 = 0 & H \\ \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 & Cl \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \\ \lambda_6 = 4\lambda_1 \\ \lambda_2 = 8\lambda_1 \\ \frac{5}{2}\lambda_1 = \lambda_5 \end{cases} \quad x_1 = 2 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

INSIEME DI GENERATORI

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 8\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \frac{5}{2}\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix} \middle| \; \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Per ogni delle seguenti equazioni lineari (o sisteme di equazioni lineari) omogenee su $\mathbb{R}$ si trovi un insieme di generatori per i sottospazi di soluzioni in $\mathbb{R}^n$, dove n è il numero di variabili coinvolte nelle equazioni.

(a) $2X_2 - 3X_1 = 0$

(b) $X_1 + 5X_2 - X_3 = 0$

(c) $X_2 - 5X_1 + X_3 = 0$

(d) $\begin{cases} X_2 + 2X_1 = X_3 \\ X_2 - X_1 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 = 0 \\ X_3 - X_2 + X_1 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} X_2 + 2X_1 = X_3 \\ X_2 - X_3 = 5X_1 \end{cases}$

a) $2X_2 - 3X_1 = 0$ IN $\mathbb{R}^2$ 1 VAR. LIBERA (SCELGO x_1)

$$X_2 = \frac{3}{2}x_1 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

[N° VAR - N° EQ. = N° VAR. LIB.]

b) $X_1 + 5X_2 - X_3 = 0$ IN $\mathbb{R}^3$ $3-1=2$ VAR. LIBERE

$X_1 - X_3 = 5X_2$

$X_1 = 5X_2 + X_3$ (X_2, X_3 VAR. LIBERE)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $x_2 - 5x_1 + x_3 = 0$ 2 VAR LIBERE

$$x_2 = 5x_1 - x_3 \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 5x_1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

d) $\begin{cases} x_2 + 2x_1 = x_3 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$ $3-2=1$ VAR LIBERA

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1 + 2x_1 = x_3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ 3x_1 = x_3 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$ 1 VAR. LIBERA

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 - x_2 - x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

f) $\begin{cases} x_2 + 2x_1 = x_3 \\ x_2 - x_3 = 5x_1 \end{cases}$ 1 VAR. LIB.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_1 = x_3 \\ \ldots \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2 + 2x_1 = x_3 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\left\{ x_2-(x_2+2x_1)=5x_1 \right. \rightsquigarrow \left\{ \cancel{x_2}-\cancel{x_2}-2x_1=5x_1 \right.$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_2+2x_1=x_3 \\ 7x_1=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2=x_3 \\ x_1=0 \end{cases} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Sia V lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$.

   (a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione.

   (b) Si dimostri che il sottoinsieme W di V che ha per elementi le soluzioni dell'equazione che soddisfano $y(\pi) = 0$ è un sottospazio vettoriale di V.

   (c) Si trovino generatori per V e per W.

SUGGERIMENTO PER IL b) : CONTROLLARE LE 3 CONDIZIONI PER S.V. :
- VETTORE NULLO
- CHIUSURA SOMMA
- CHIUSURA MOLT. PER UNO SCALARE

a) $y''+y=0$ (GUARDA TUTORATO 15/12/25)

EQ. ASSOCIATA $\lambda^2+1=0 \rightsquigarrow x_{1,2} = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$

$\rightsquigarrow$ SOL. GEN $c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) V SP. SOLUZIONI $(V,+)$, $W = \{ y \in V \mid y(\pi) = 0 \}$

b) V SP. SOLUZIONI $(V,+)$, $W = \{y \in W \mid y(\pi)=0\}$

FUNZIONE COSTANTE NULLA

- EL. NULLO: $y(x)=0 \in V$ e $y(\pi)=0 \Rightarrow 0 \in W$ ✓
- CHIUSURA RISPETTO ALLA SOMMA: $y_1, y_2 \in W$

$(y_1+y_2)(\pi) = y_1(\pi) + y_2(\pi) = 0+0 = 0$

$\Rightarrow y_1+y_2 \in W$ ✓

- CHIUSURA MOLT. SCALARE: $y \in W$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (ky)(\pi) = k(\underbrace{y(\pi)}_{0}) = 0 \Rightarrow ky \in W$ ✓

c) GENERATORI DI V (= SOLUZIONI)

ESSENDO LA SOL. GEN $c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
OGNI SOL. È COMB. LIN. DI cos e sin

$\Rightarrow \{\cos(x), \sin(x)\}$ SONO GENERATORI

DI W: SE $y(\pi)=0 \Rightarrow c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = 0$

$\Rightarrow -c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow$ SOL. GEN IN W: $c_2 \sin(x)$

$\Rightarrow W$ È GENERATO DA $\{\sin(x)\}$

5. Per ognuna delle seguenti liste di vettori in $\mathbb{R}^3$, si trovi un sistema di equazioni lineari omogenee per cui lo spazio delle soluzioni sia precisamente il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla lista.

   (a) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (1,10,-11)$
   (b) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (1,8,13)$
   (c) $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (1,10,-11)$.

a) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (1,10,-11)$

- VERIFICO INDIPENDENZA

NOTO: $v_3 = -10v_1 + \frac{11}{3}v_2$

- PASSAGGIO PER v_1 e v_2 (v_3 È DIP.)

$ax + by + cz = 0$

$$\begin{cases} v_1: a+b+c=0 \\ v_2: 3a-c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} +b=-4a \\ c=3a \end{cases}$$

SCELGO UN VAL. ARBITRARIO DI a (ES $=1$)

$\Rightarrow$ EQ: $x - 4y + 3z = 0$

b) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (1,8,13)$

$v_3 = 4v_1 - v_2 \Rightarrow v_3$ DIP

$ax + by + cz = 0$

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3a-c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2b=-10a \\ 3a=c \end{cases} \sim \begin{cases} b=-5a \\ c=3a \end{cases}$$

$a=1$: $x - 5y + 3z = 0$

c) $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (1,10,-11)$

$v_3 = 5v_1 - 4v_2 \Rightarrow v_3$ DIP

$v_3 = 5v_1 - 4v_2 \Rightarrow v_3$ DIP

$$\begin{cases} a+2b-3c=0 \\ a-c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2b=2a \\ a=c \end{cases} \sim \begin{cases} a=b \\ a=c \end{cases}$$

$\Rightarrow a=1: \quad x+y+z=0$

In $\mathbb{R}^4$, siano $v_1=(1,2,3,4)$ e $v_2=(1,-2,3,-4)$. Esistono numeri reali a e b tali che $(a,1,b,1)$ appartenga al sottospazio generato da v_1 e v_2?

SUGGERIMENTO: USA LA STESSA TECNICA DI PRIMA PER IL SOTTOSP. GEN DA v_1 e v_2 CON $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$

$v_1=(1,2,3,4), \quad v_2=(1,-2,3,-4)$

$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b+3c+4d=0 \\ a-2b+3c-4d=0 \end{cases} -$$

$$+4b \quad +8d=0$$

$\Rightarrow 4b+8d=0 \Rightarrow b=-2d$

$\sim (\cdot, -2d, \cdot, d)$

$\Rightarrow$ NO SOL. DEL TIPO $(a, 1, b, 1)$

$1 = -2\lambda = \lambda$ NO SOL

7. Vero o falso? Si giustifichi la risposta.

   (a) Il vettore $(2,1,3)$ di $\mathbb{R}^3$ é una combinazione lineare (su $\mathbb{R}$) dei vettori $(-1,1,-1)$ e $(1,0,\frac{4}{3})$.

   (b) il vettore $(-1,1)$ di $\mathbb{C}^2$ é una combinazione lineare (su $\mathbb{C}$) del vettore $(i,-i)$.

   (c) I punti di una retta passante nell'origine contenuta in $\mathbb{R}^2$ costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

a) $v_3 = (2,1,3)$. $v_1 = (-1,1,-1)$, $v_2 = (1,0,\frac{4}{3})$

$$a(-1,1,-1) + b(1,0,\tfrac{4}{3}) = (2,1,3)$$

$\Rightarrow$ COMP. PER COMP. : $\begin{cases} -a+b=2 \\ a=1 \\ -a+\frac{4}{3}b=3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \\ -a+\frac{4}{3}b=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \\ -1+4=3 \end{cases}$ V $\Rightarrow v_3 = v_1 + 3v_2$ VERO!

b) $(-1,1)$ COMB. LIN. DI $(i,-i)$ SU $\mathbb{C}$

MOLTIPLICO $(i, -i)$ PER $\overset{\text{SCALARE SU } \mathbb{C}}{i}$: $(i \cdot i, -i \cdot i) = (-1, 1)$ VERO !

c) RETTA PER L'ORIGINE: $\overset{\text{SOTTOSP. DI } \mathbb{R}^2}{V} = \{(x, y) \mid ax + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

- EL. NULLO: $(0,0) \in V$ OK
- CHIUSURA SOMMA: $(x,y), (x', y') \in V$. $(ax + by = 0,\ ax' + by' = 0)$

$(x,y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$$a(x + x') + b(y + y') = \overbrace{ax + ax'}^{=0} \underbrace{+ by + by'}_{=0} = 0$$

- MOLT. SCALARE: $k \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in V$

$$k(x,y) = (kx, ky) \Rightarrow a(kx) + b(ky) = k\,ax + k\,by =$$

$$= k\underbrace{(ax + by)}_{=0} = 0$$ VERO !