OGGI SVOLGEREMO ALCUNI ESERCIZI PRESI DA APPELLI D'ESAME PRECEDENTI

PROF. BOTTACCIN

MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

Terzo Compitino
25 giugno 2024

1. Si consideri il sottospazio $W = \langle(1,1,2-1),(1,1,0,0),(1,1,4,-2)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.
   (a) Si trovi una base per W.
   (b) Si trovi una base per un complemento di W in $\mathbb{R}^4$.

→ CONSIGLIO IL SUO CANALE YOUTUBE!

SUGGERIMENTO: UTILIZZARE LA DEF. DI L.I PER a)
$(\alpha v_1 + \beta v_2 + \dots = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \dots = 0)$

PER b) UTILIZZATE LE EQ. CARTESIANE!

$W = \langle (1,1,2,-1),(1,1,0,0),(1,1,4,-2) \rangle$

a) BASE PER W: VOGLIO VERIFICARE SE I VETTORI SONO L.I.

$$\alpha(1,1,2,-1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,4,-2) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha+4\gamma=0 \\ -\alpha-2\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \alpha=-2\gamma \end{cases}$$

QUINDI $\forall$ VALORE DI $\gamma \neq 0$ TROVO UNA COMB. LIN. $= (0,0,0,0)$
$\Rightarrow$ NON SONO L.I.

BASTA QUINDI TOGLIERE $(1,1,4,-2)$ (OVVERO PORRE $\gamma=0$)
PER OTTENERE 2 VETT. L.I. E QUINDI UNA BASE

$$W = \langle (1,1,2,-1), (1,1,0,0) \rangle$$

b) COMPLETARE W PER OTTENERE UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$

SCRIVO LE EQ. CART. DI W

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,2,-1) + \beta(1,1,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha+\beta \\ z = 2\alpha \\ t = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2t \end{cases}$$

AGGIUNGO UN VETTORE (SE POSSIBILE DELLA BASE CANONICA, COSÌ I CONTI SONO PIÙ SEMPLICI!) CHE NON SODDISFA LE EQ. (IN MODO CHE SIA L.I.). AD ESEMPIO $(1,0,0,0)$ CHE SODDISFA LA SECONDA MA NON LA PRIMA (BASTA CHE NON NE SODDISFI UNA!)

OTTENGO $W' = \langle (1,1,2,-1), (1,1,0,0), (1,0,0,0) \rangle$

RIPETO IL PROCEDIMENTO:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,2,-1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha+\beta+\gamma \\ y = \alpha+\beta \\ z = 2\alpha \\ t = -\alpha \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} z = -2t \end{cases}$$

AGGIUNGO $e_3 = (0,0,1,0)$ CHE NON SODDISFA L'EQ

E QUINDI $\mathcal{B} = \{(1,1,2,-1), (1,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$

È BASE DI $\mathbb{R}^4$!

MATEMATICA (Scienza dei Materiali)

1° Compitino — 16 novembre 2024

PROF. BOTTACCIN

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 1, 2)$, $u_2 = (-4, 4, -2, -3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Ridurre la seguente matrice in forma a scala e determinare il rango, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$V = x_1 - 2x_3 = 0$, $U = \langle \underbrace{(2,-1,1,2)}_{u_1}, \underbrace{(-4,4,-2,-3)}_{u_2}, \underbrace{(2,1,1,3)}_{u_3} \rangle$

a) DIM. E BASE DI V

$x_1 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ È UN GENERICO VETTORE DI V

$\Rightarrow$ HO 3 VAR. LIBERE: x_2, x_3, x_4

BASTA QUINDI PRENDERE $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ PER x_2, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ PER x_3

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ PER x_4 $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È BASE DI V

b) DIM. E BASE PER U, $U \subset V$

$U = \langle (2,-1,1,2), (-4,4,-2,-3), (2,1,1,3) \rangle$

VERIFICO SE SONO L.I (O USO LA DEFINIZIONE COME NELL'ES. SOPRA O UTILIZZO LA MAT. RIDOTTA. GIUSTO PER VEDERE ENTRAMBI FACCIO LA SECONDA):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 PIVOT $\Rightarrow$ Dim $= 2$

COME BASE POSSO PRENDERE LE 2 RIGHE NON NULLE

$B' = \{(2,-1,1,2), (0,2,0,1)\}$

PER VEDERE SE $U \subset V$ BASTA VERIFICARE SE I VETTORI DELLA BASE VERIFICANO L'EQ. DI V: $x_1 = 2x_3$

↳ OPPURE w_1, w_2, w_3

CHIARAMENTE B' SODDISFA L'EQ. E QUINDI $U \subset V$

c) $U \oplus L = V$, L È UNICO?

DEVONO VALERE: • $\text{Dim}(U) + \text{Dim}(L) = \text{Dim}(V)$

$\Rightarrow 2 + \text{Dim}(L) = 3 \Rightarrow \text{Dim}(L) = 1$

• $U \cap L = \{0\}$

DEVO QUINDI TROVARE UN VETTORE CHE STA IN V MA NON IN U

SCRIVO LE EQ. CART. DI U:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(2,-1,1,2)+\beta(0,2,0,1)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = -\alpha+2\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 2\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3+2(x_4-2x_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -5x_3+2x_4 \end{cases}$$

RICORDO: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ BASE DI V

CHIARAMENTE $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ NON APPARTIENE AD U (NON SODDISFA LE EQ)

MA APPARTIENE A V $\Rightarrow U \oplus \underset{\underset{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\shortparallel}}{L} = V$

È UNICO? NO! AD ESEMPIO $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ MA $\notin U$ E FUNZIONA

d) RANGO AL VARIARE DI α:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = 0$: $rk = 2$ (2 PIVOT)

$\alpha \neq 0$: $rk = 3$ (3 PIVOT)

PROF LONGO (?)

MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

2° Compitino — 24 gennaio 2025

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - t = 1 \\ -2x + z + t = 0 \\ -6y + 5z - t = 2 \\ x + t = 2 \end{cases}$$

(i) Si scriva la matrice completa associata al sistema di equazioni e si usi l'algoritmo di eliminazione Gaussiana portandola in forma ridotta.

(ii) Si usi il Teorema di Rouchè-Capelli per predire il numero di soluzioni (se infinite, si indichi il numero di parametri).

(iii) Se ci sono soluzioni, si trovino tutte le soluzioni (nel caso ci siano infinite soluzioni, si trovino le equazioni che fanno dipendere le variabili dal corretto numero di parametri).

RICORDO: ROUCHÉ-CAPELLI: SIA $A = (A' | b)$ LA MAT. DI UN SISTEMA DI m INCOGNITE ED n EQ

- IL SISTEMA HA SOL. SSE $rk(A'|b) = rk A$
- SONO INFINITE SE $rk(A'|b) = rk A < n$
- E' UNICA SE $rk(A'|b) = rk A = n$

MAT. DEL SISTEMA:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A'} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 4 \\ 0 \end{matrix}}_{b}\right) = A$$

$rk A = 3$ (3 PIVOT), $rk(A') = 3$ (3 PIVOT) rk A = 3 (3 PIVOT), rk(A

$\Rightarrow$ IL SISTEMA HA SOL., NE HA INFINITE (4 EQ, 3<4)

TROVO LE SOL. IN FUNZIONE DEL PARAMETRO: SARÀ UNO IN QUANTO $4-3=1$. PONGO QUINDI UNA INCOGNITA QUALSIASI $=\alpha$, IL NOSTRO PARAMETRO. SCELGO $t=\alpha$.

PER RISOLVERE IL SISTEMA METTO LA MIA MATRICE IN FORMA RIDOTTA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\alpha=2 \\ y+\frac{8}{3}\alpha=3 \\ z+3\alpha=4 \\ t=\alpha \end{cases} \sim \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3-\frac{8}{3}\alpha \\ z=4-3\alpha \\ t=\alpha \end{cases}$$