

SEGNALI E SISTEMI
Prima prova di autovalutazione 2025
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
31 marzo 2025
SOLUZIONI

Esercizio 1 Proprietà dei Sistemi– [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione:

$$y(n) = \begin{cases} |x(n) + x(n-1)| & n < 0 \\ x^2(n) & n \geq 0. \end{cases}$$

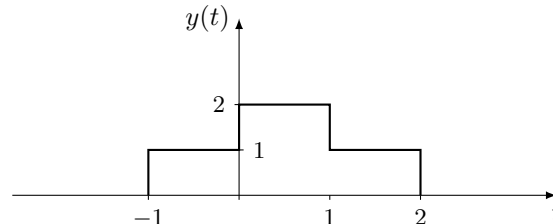
1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile [5 punti], giustificando opportunamente le risposte.
2. Calcolare la risposta impulsiva [1 punto].
3. Calcolare la risposta al gradino [1 punto].

Soluzione.

1. non è statico poiché per calcolare l'uscita al tempo n_0 è necessario conoscere l'ingresso al tempo $n_0 - 1$. E' invece causale poiché per calcolare l'uscita al tempo n è necessario conoscere l'ingresso ai tempi $n \leq n_0$. Non è lineare perchè nè il modulo nè il quadrato sono funzioni lineari. Non è tempo-invariante a causa della condizione su n . E' chiaramente BIBO stabile.
2. La risposta impulsiva è $h(n) = \delta(n)$.
3. La risposta al gradino è $h_{-1}(n) = 1(n)$.

Esercizio 2 – Convoluzione e sue proprietà [punti 7]

Siano dati il segnale $x(t) = \text{rect}(t)$ ed il segnale $y(t)$ illustrato in figura.



Si chiede di:

1. Calcolare la derivata generalizzata di $y(t)$;

2. Calcolare e disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$;
3. Calcolare l'area e l'estensione del segnale convoluzione $z(t)$;
4. Calcolare la convoluzione $q(t)$ tra $x(t - \frac{1}{2})$ e $y(t + 1)$.

Soluzione.

1. La derivata generalizzata si calcola per ispezione, identificando i punti di discontinuità (altrove il segnale è costante) e si ottiene

$$y'(t) = \delta(t + 1) + \delta(t) - \delta(t - 1) - \delta(t - 2) .$$

2. La convoluzione si calcola agevolmente considerando che

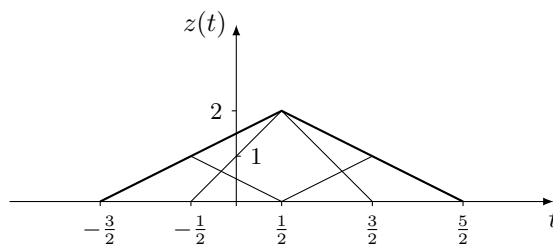
$$y(t) = \text{rect}(t + \frac{1}{2}) + 2 \text{rect}(t - \frac{1}{2}) + \text{rect}(t - \frac{3}{2})$$

e ricordando che $\text{rect} * \text{rect}(t) = x * \text{rect}(t) = \text{triangle}(t)$. Pertanto

$$\begin{aligned} z(t) &= x * y(t) \\ &= x * \text{rect}(t + \frac{1}{2}) + 2 x * \text{rect}(t - \frac{1}{2}) + x * \text{rect}(t - \frac{3}{2}) \\ &= \text{triangle}(t + \frac{1}{2}) + 2 \text{triangle}(t - \frac{1}{2}) + \text{triangle}(t - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

che, come illustrato in figura, restituisce

$$z(t) = 2 \text{triangle}(\frac{t - \frac{1}{2}}{2})$$



3. L'area si può calcolare dalla figura oppure, equivalentemente, dalla regola del prodotto tra le aree

$$A_z = A_x \cdot A_y = 1 \cdot 4 = 4 ,$$

e similmente si ha per l'estensione

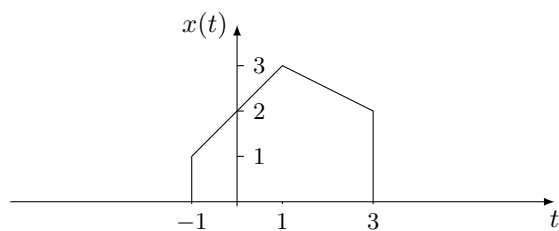
$$e(z) = [t_x + t_y, T_x + T_y] = [-\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} + 2] = [-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] .$$

4. Per la convoluzione dei segnali traslati si ottiene, dalla regola di traslazione,

$$q(t) = x * y(t - \frac{1}{2} + 1) = z(t + \frac{1}{2}) = 2 \text{triangle}(\frac{1}{2}t) .$$

Esercizio 3 – Semplici trasformazioni di segnali [punti 3]

Dato il segnale $x(t)$ illustrato in figura,

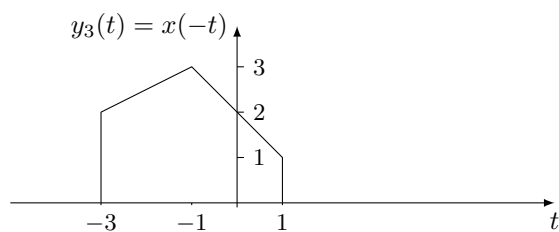
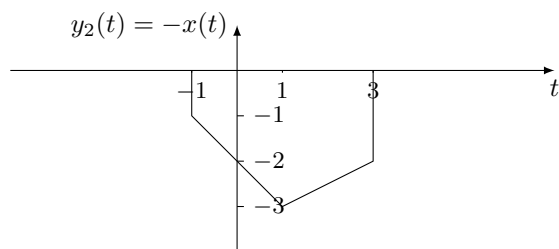
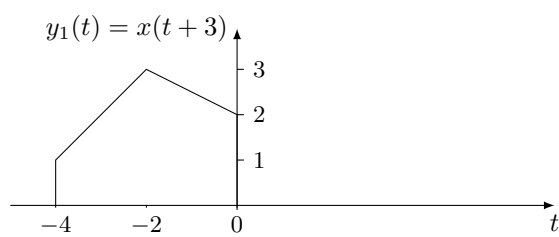


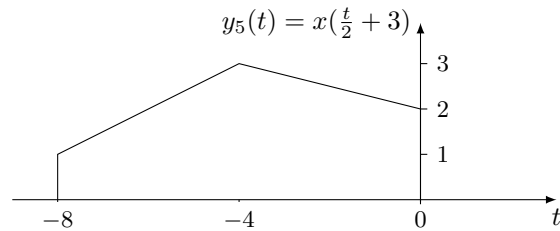
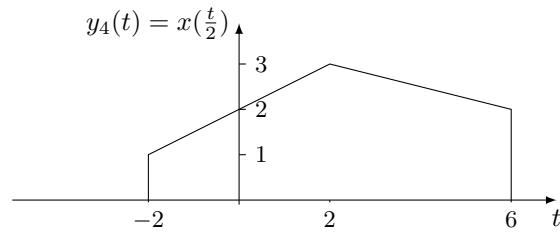
si disegnino i segnali:

1. $y_1(t) = x(t + 3)$
2. $y_2(t) = -x(t)$
3. $y_3(t) = x(-t)$
4. $y_4(t) = x(\frac{t}{2})$
5. $y_5(t) = x(\frac{t}{2} + 3)$

Soluzione.

I segnali sono mostrati in figura





Esercizio 4 – Energia e potenza di segnali discreti [punti 3]

Sia dato il segnale discreto

$$s(n) = 2 \cos(8n) + j e^{j \frac{\pi}{24} n}$$

1. Si identifichi se il segnale è periodico ed in caso affermativo quale sia la sua periodicità;
2. Si identifichino l'energia E_s e la potenza P_s del segnale;
3. Si identifichino energia e potenza per i segnali $x(n) = s(n) \cdot 1_0(n)$ e $y(n) = s(n) + \text{rect}(\frac{1}{9}n)$.

Soluzione.

1. Il coseno non è periodico in quanto la sua pulsazione non è esprimibile nella forma π moltiplicato per un numero razionale, per cui $s(n)$ non è periodico.
2. Dalla proprietà della potenza di combinazioni lineari di sinusoidi si ha

$$P_s = \frac{1}{2} 2^2 + |j|^2 = 2 + 1 = 3 ,$$

e pertanto l'energia è infinita.

3. Il segnale $x(n)$ disattiva $s(n)$ a tempi negativi e pertanto, per simmetria, si ha $P_x = \frac{1}{2} P_s = \frac{3}{2}$ e quindi $E_x = \infty$. Per il segnale $y(n)$ stiamo sommando un contributo limitato nel tempo (ovvero a potenza nulla), che pertanto

non cambia le proprietà di potenza in quanto, utilizzando la notazione $z(n) = \text{rect}(\frac{1}{9}n)$,

$$\begin{aligned}
P_y &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2N} \sum_{n=-N}^N \underbrace{(s(n) + z(n))}_{y(n)} \underbrace{(s^*(n) + z(n))}_{y^*(n)} \\
&= P_s + P_z + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2N} \sum_{n=-N}^N s(n)z(n) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2N} \sum_{n=-N}^N s^*(n)z(n) \\
&= P_s + 0 + 0 + 0 \\
&= P_s = 3,
\end{aligned}$$

poichè le somme a numeratore convergono ad un valore finito in quanto $z(n)$ ha estensione temporale limitata, mentre il denominatore $1 + 2N$ tende ad infinito. Inoltre $E_y = \infty$.

SEGNALI E SISTEMI
Seconda prova di autovalutazione 2025
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
12 maggio 2025
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [7 punti]

Il segnale

$$s(t) = \text{rep}_1 \text{triang}(2t) + 5 \cos(4\pi t)$$

viene filtrato da un filtro con funzione di trasferimento

$$H(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

1. Dire se $s(t)$ è periodico ed in caso affermativo quale sia il periodo.
2. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier S_k .
3. Calcolare il segnale $y(t) = s * h(t)$ in uscita dal filtro.

Soluzione.

1. Il primo contributo del segnale è evidentemente periodico di periodo 1, mentre il coseno è periodico di periodo $\frac{1}{2}$, pertanto il segnale è periodico di periodo $T_p = 1$.
2. Per il calcolo di coefficienti della serie di Fourier si noti che $\omega_0 = 2\pi/T_p = 2\pi$. Quindi, i coefficienti della serie si possono calcolare in vari modi. Sfruttando la regola di convoluzione (periodica) e sviluppando il coseno tramite Eulero il segnale si può scrivere nella forma

$$s(t) = 2x * x(t) + \frac{5}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{-j2\omega_0 t}, \quad x(t) = \text{rep}_1 \text{rect}(2t)$$

con $x(t)$ onda quadra avente duty cycle $d = \frac{1}{2}$, e pertanto

$$\begin{aligned} S_k &= 2X_k^2 + \frac{5}{2}\delta(k-2) + \frac{5}{2}\delta(k+2) \\ &= \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{5}{2}\delta(k-2) + \frac{5}{2}\delta(k+2) \end{aligned}$$

Alternativamente, per chi conosce la regola di campionamento dalla trasformata di Fourier, si ha

$$u(t) = \text{triang}(2t) \implies U(j\omega) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{T_p}U(jk\omega_0) + \frac{5}{2}\delta(k-2) + \frac{5}{2}\delta(k+2) \\ &= \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{5}{2}\delta(k-2) + \frac{5}{2}\delta(k+2) \end{aligned}$$

Oppure si possono calcolare i coefficienti di Fourier a_k dell'onda quadra, che rappresenta la derivata dell'onda triangolare, ed utilizzare la proprietà

di integrazione. La suddetta onda quadra si può infatti pensare come la differenza tra due onde quadre canoniche, di ampiezza 2, pulsazione fondamentale 2π , e duty cycle $\frac{1}{2}$, la prima traslata in $-\frac{1}{4}$ e la seconda in $\frac{1}{4}$. Per cui:

$$a_k = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot e^{jk\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right]$$

Da cui, i coefficienti dell'onda triangolare, per $k \neq 0$,

$$T_k = \frac{a_k}{jk \cdot 2\pi} = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

da cui

$$S_k = T_k + \frac{5}{2} \delta(k-2) + \frac{5}{2} \delta(k+2) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{5}{2} \delta(k-2) + \frac{5}{2} \delta(k+2)$$

3. Il filtraggio è un prodotto tra i coefficienti di Fourier e la funzione di trasferimento calcolata per $\omega = k\omega_0 = k \cdot 2\pi$, ovvero

$$\begin{aligned} Y_k &= X_k H(jk\omega_0) \\ &= \left(\frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{5}{2} \delta(k-2) + \frac{5}{2} \delta(k+2) \right) \cdot \text{sinc}(k) \end{aligned}$$

in cui $\text{sinc}(0) = 1$ e $\text{sinc}(k) = 0$ per $k \neq 0$, ovvero $\text{sinc}(k) = \delta(k)$. Pertanto solo il coefficiente in $k = 0$ viene mantenuto

$$Y_k = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \delta(k) = \frac{1}{2} \delta(k)$$

e si ha $y(t) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2 [7 punti]

Determinare i segnali $x(t)$ che soddisfano le seguenti condizioni:

1. $x(t)$ è reale e pari;
2. $x(t)$ è periodico di periodo 8 con coefficienti di Fourier a_k ;
3. $a_k = 0$ per $|k| > 2$;
4. $\frac{1}{8} \int_0^8 x(t) dt = -3$;
5. $\int_1^9 |x(t)|^2 dt = 92$;
6. $\int_{-1}^7 x(t) e^{j\frac{\pi}{2}t} dt = -8$;

Soluzione.

Il segnale ha pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Dalle proprietà 4) e 2) deduciamo che

$$a_0 = \frac{1}{8} \int_0^8 x(t) dt = -3$$

Dalla proprietà 1) si ha che $a_{-1} = a_1$ e $a_{-2} = a_2$. Dalla proprietà 6) si ha che

$$a_{-2} = \frac{1}{8} \int_{-1}^7 x(t) e^{-j(-2)\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{-8}{8} = -1 = a_2$$

Dalle proprietà 3) e 5) e dal teorema di Parseval, invece, si ha che

$$P_8 = \frac{1}{8} \int_1^9 |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-2}^2 |a_k|^2 = \frac{92}{8} = \frac{23}{2}$$

da cui

$$9 + 2|a_1|^2 + 2 = \frac{23}{2}$$

$$|a_1|^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = a_{-1} = \pm \frac{1}{2}$$

Per cui, i segnali che soddisfano le condizioni richieste sono

$$x(t) = -3 \pm \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Esercizio 3 – [3 punti]

Il segnale a tempo discreto

$$x(n) = 2 + \cos\left(\frac{8\pi}{15}n - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-j\frac{\pi}{6}n} - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

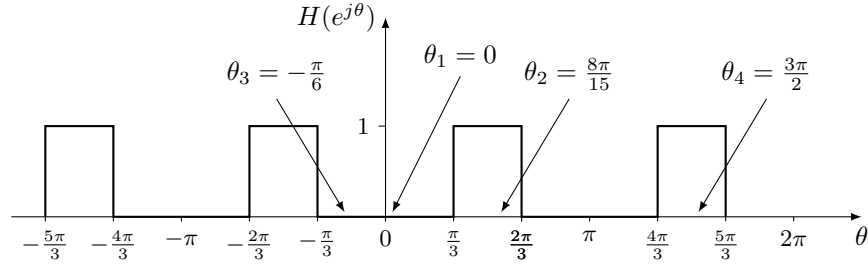
viene filtrato con un filtro passa banda ideale avente risposta in frequenza definita in $(-\pi, \pi]$ come

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{3} \leq |\theta| < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare l'uscita $y(n)$.

Soluzione.

La risposta in frequenza è disegnata in figura (si ricorda che la risposta in frequenza di un sistema LTI a tempo discreto è periodica di periodo 2π ; in figura sono rappresentati 2 periodi).



Il segnale $x(n)$ è la somma di quattro contributi:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) + x_4(n)$$

con $x_1(n) = 2$, $x_2(n) = \cos(\frac{8\pi}{15}n - \frac{\pi}{4})$, $x_3(n) = -e^{-j\frac{\pi}{6}n}$, $x_4(n) = -2\sin(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$

Ora, $x_1(n)$ ha pulsazione $\theta_1 = 0$ e viene quindi cancellato; $x_2(n)$ ha pulsazioni $\theta_2 = \pm \frac{8\pi}{15}$ che cadono nella banda passante del filtro e passa quindi inalterato; $x_3(n)$ ha pulsazione $\theta_3 = -\frac{\pi}{6}$ che cade nella banda oscura e quindi viene cancellato; $x_4(n)$ ha pulsazioni $\theta_4 = \pm \frac{3\pi}{2}$ che cadono nella banda passante del filtro e passa quindi inalterato. Il segnale di uscita è quindi:

$$y(n) = \cos(\frac{8\pi}{15}n - \frac{\pi}{4}) - 2\sin(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$$

SEGNALI E SISTEMI
16 giugno 2025
Primo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si consideri il sistema

$$y(t) = x(t-1) + \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-3(t-\tau)} d\tau$$

1. Dire se è a) statico, b) causale, c) lineare, d) tempo-invariante, e) BIBO-stabile, giustificando le risposte [1 punto per ognuno dei 5 quesiti].
2. Trovare la risposta impulsiva $h(t)$ e la sua trasformata di Fourier $H(j\omega)$ [2 punti].

Soluzione.

1. a) Il sistema non è statico poichè per calcolare $y(t)$ non è sufficiente conoscere $x(t)$ ma, ad esempio, serve conoscere anche $x(t-1)$. Il sistema è in effetti una convoluzione. Si noti infatti che l'uscita si può scrivere come

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t-1) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) 1(t-\tau) e^{-3(t-\tau)} d\tau \\ &= x(t-1) + x(t) * [e^{-3t} 1(t)] \\ &= x * h(t) , \end{aligned}$$

con risposta impulsiva globale

$$h(t) = \delta(t-1) + e^{-3t} 1(t) .$$

- c,d) Essendo una convoluzione, il sistema è certamente LTI. b) Inoltre, essendo $h(t) = 0$ per $t < 0$, il sistema è causale. e) Infine, il sistema è BIBO-stabile poichè $h(t)$ è assolutamente integrabile.
2. La risposta impulsiva è quella riportata al punto precedente. La sua trasformata di Fourier si può facilmente ricavare dalla trasformata di Laplace, ovvero

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = e^{-s} + \frac{1}{s+3} \Big|_{s=j\omega} = e^{-j\omega} + \frac{1}{3+j\omega}$$

Esercizio 2 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo continuo LTI con risposta impulsiva:

$$h(t) = (t + \sin(2t) + e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

con $1(t)$ gradino unitario.

1. Trovare la funzione di trasferimento [2 punti].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta [1 punto].
3. Trovare l'equazione differenziale associata [1 punto].
4. Dato il segnale $x(t)$, con trasformata di Laplace

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)},$$

trovare $x(t)$ [1 punto].

5. Dire se l'uscita forzata $y_f(t)$ relativa al segnale $x(t)$ è limitata oppure no [2 punti] (si fa notare come non sia necessario eseguire il calcolo esatto dei residui di $y_f(t)$ quando si esegue l'estrazione dei poli).

Soluzione.

1. Ricordando le regole della trasformata di Laplace si ottiene

$$H(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{s + 2}$$

2. I poli sono: $p_1 = 0$ doppio, $p_{2,3} = \pm 2j$ semplici, e $p_4 = -2$ semplice. Perciò il sistema non è BIBO stabile in quanto i poli $p_{1,2,3}$ hanno parte reale identicamente uguale a zero, e non strettamente minore di zero. La BIBO stabilità si vede anche nel dominio del tempo, in cui la risposta impulsiva non decade al crescere di t , e pertanto non risulta assolutamente integrabile.

3. L'equazione differenziale associata al sistema si ricava scrivendo $H(s)$ nella forma

$$H(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} y^V(t) + 2y^{IV}(t) + 4y'''(t) + 8y''(t) \\ = x^{IV}(t) + 3x'''(t) + 10x''(t) + 4x'(t) + 8x(t) \end{aligned}$$

4. Per trovare l'antitrasformata di $X(s)$ si procede all'estrazione dei poli

$$X(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+3}$$

Per il calcolo dei residui R_k si procede come di consueto

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot X(s) = -\frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot X(s) = \frac{3}{2}$$

per cui $x(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} 1(t) + \frac{3}{2} e^{-3t} 1(t)$.

5. La trasformata di Laplace di $y_f(t)$ è:

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= H(s) \cdot X(s) \\ &= \frac{s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s^2(s^2+4)(s+2)} \\ &= \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s(s^2+4)(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2+4} + \frac{R_4}{s+1} + \frac{R_5}{s+2} + \frac{R_6}{s+3} \end{aligned}$$

che nel tempo corrisponde a

$$y(t) = \left[R_1 + R_2 \cos(2t) + \frac{1}{2} R_3 \sin(2t) + R_4 e^{-t} + R_5 e^{-2t} + R_6 e^{-3t} \right] 1(t)$$

che è un segnale limitato.

Esercizio 3 [punti 7]

Siano dati i segnali a tempo discreto

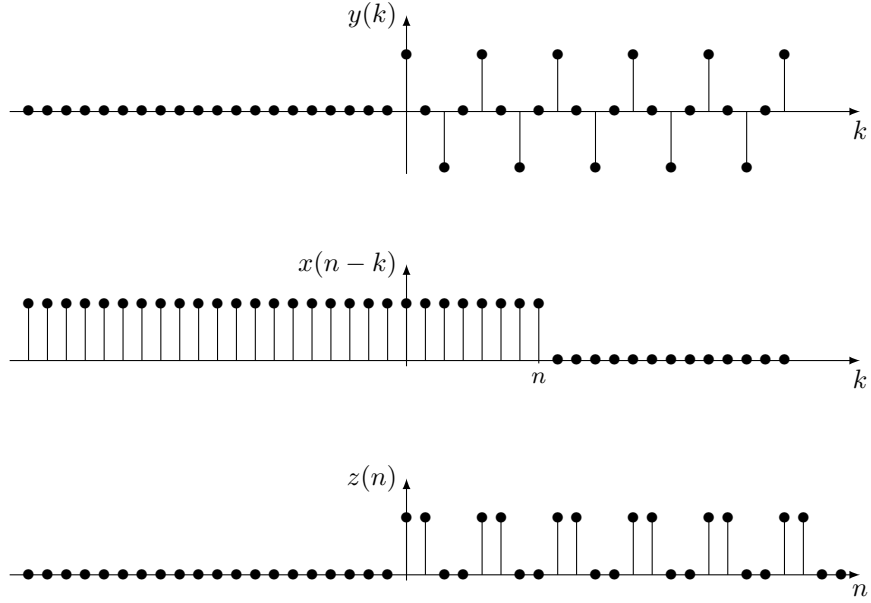
$$\begin{aligned} x(n) &= 1_0(n) \\ y(n) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) 1_0(n) \end{aligned}$$

con $1_0(n)$ il gradino discreto (di valore 1 per $n \geq 0$ e zero altrove). Dopo aver disegnato i due segnali, si chiede di:

1. calcolare il segnale convoluzione $z(n) = x * y(n)$, e disegnarlo [5 punti].
2. calcolare la potenza dei tre segnali, x , y , e z [2 punti].

Soluzione.

1. I segnali $y(k)$ e $x(n-k)$ sono quelli illustrati in figura.



Impiegando quindi il metodo grafico si ottiene

$$z(n) = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n = 4k, k \geq 0 \\ 1 & , n = 4k + 1 \\ 0 & , n = 4k + 2 \\ 0 & , n = 4k + 3 \end{cases}$$

con k intero positivo.

2. Per le potenze, da semplici calcoli e considerando la natura ternaria dei segnali (valori 0, 1, -1), si ha

$$P_x = \frac{1}{2} , \quad P_y = P_z = \frac{1}{4} .$$

Esercizio 4 [punti 3]

Il segnale a tempo discreto

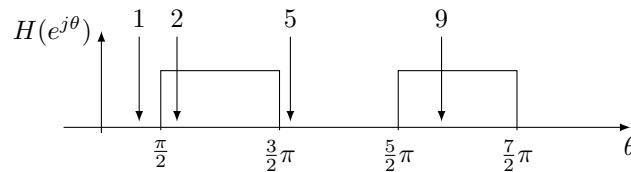
$$x(n) = 7 + \cos(n) - 3 \sin(2n) + e^{-j5n} + 7 \cos(9n)$$

viene filtrato da un filtro passa-alto ideale con pulsazione di taglio $\theta_c = \frac{\pi}{2}$, ovvero con risposta in frequenza

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0 & , |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

nel periodo fondamentale $[-\pi, \pi]$. Si chiede di valutare il segnale di uscita $y(n)$.

Soluzione Data la natura esponenziale complessa/sinusoidale delle componenti del segnale, in questo caso è sufficiente capire se le pulsazioni delle diverse componenti ricadono o meno nella banda passante del filtro. Graficamente per θ positive si ha



e pertanto

$$y(n) = -3 \sin(2n) + 7 \cos(9n)$$

Esercizio 5 [punti 3]

Sia dato il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(2t) + \cos(10t)$. Dopo aver identificato la banda del segnale, si chiede di proporre uno schema di campionamento/interpolazione in banda base in grado di ricostruire esattamente il segnale dai propri campioni, specificando il più grande passo di campionamento T che ne garantisca la ricostruibilità.

Soluzione Passando al dominio di Fourier si ha

$$\text{sinc}(2t) \longrightarrow \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

con estensione $[-2\pi, 2\pi]$ e pertanto, sfruttando le regole della convoluzione, nel dominio di Fourier il segnale sinc^2 avrà estensione $[-4\pi, 4\pi]$. Il coseno ha pulsazione $10 < 4\pi$, e pertanto la banda del segnale risulta $[-4\pi, 4\pi]$. Per la scelta della pulsazione di campionamento minima, usiamo il teorema di Shannon, per cui $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_M = 8\pi$, ovvero $T_s \leq \frac{1}{4}$, per cui il valore richiesto è $T_s = \frac{1}{4}$.

Esercizio 6 - Matlab [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento T , siano contenuti nel vettore $\mathbf{x}$. Dato il seguente script (che deriva numericamente la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$):

```
Nx = length(x);
omx = (0:Nx-1)*pi/(Nx*T);
X = T*fft(x);
semilogy(omx,abs(X));
```

Dopo aver individuato e corretto un errore presente nel codice, si dica cosa rappresenta `omx` e perché viene calcolato in quel modo.

Soluzione L'errore sta nella definizione di `omx`, in cui manca un fattore 2, ovvero

```
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T);
```

Il vettore `omx` rappresenta infatti l'asse delle pulsazioni. Viene calcolato in quel modo perché la funzione `fft` restituisce `Nx` campioni della trasformata di Fourier, equispaziati nell'intervallo di pulsazioni $[0, \omega_c)$, con $\omega_c = 2\pi/T$.

SEGNALI E SISTEMI
4 luglio 2025
secondo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si considerino i segnali a tempo continuo

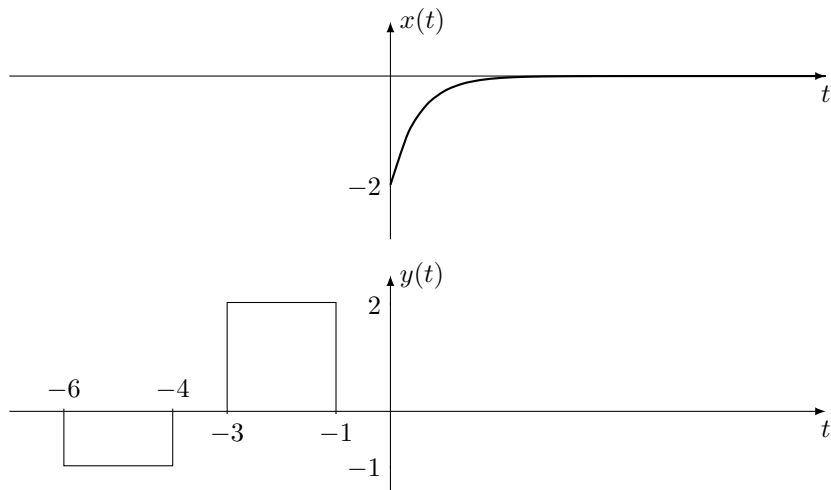
$$x(t) = -2e^{-2t}1(t), \quad y(t) = -\text{rect}\left(\frac{t+5}{2}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

Si chiede di:

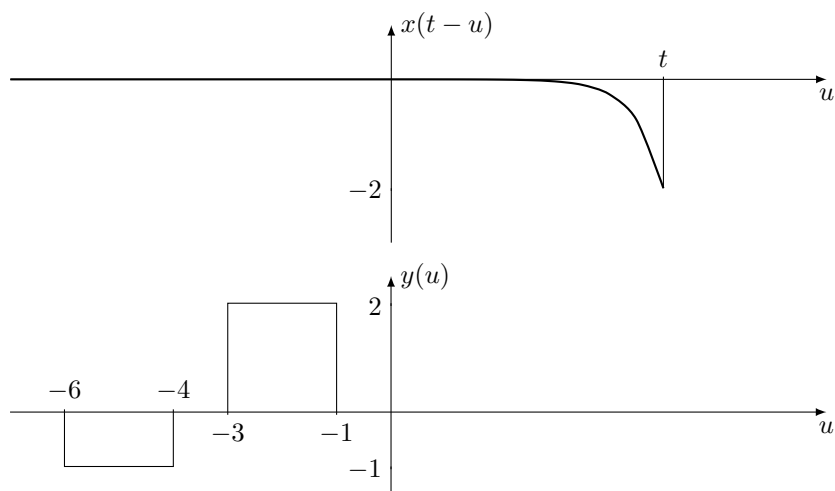
1. disegnare i segnali $x(t)$ e $y(t)$; [1 punto]
2. calcolare la convoluzione $z(t) = x * y(t)$; [4 punti]
3. calcolare le aree dei tre segnali, A_x , A_y e A_z . [2 punti]

Soluzione.

1. I segnali sono mostrati in figura:



2. Approcciamo la convoluzione tramite metodo grafico tenendo fermo $y(t)$ e ribaltando a traslando $x(t)$, come illustrato in figura



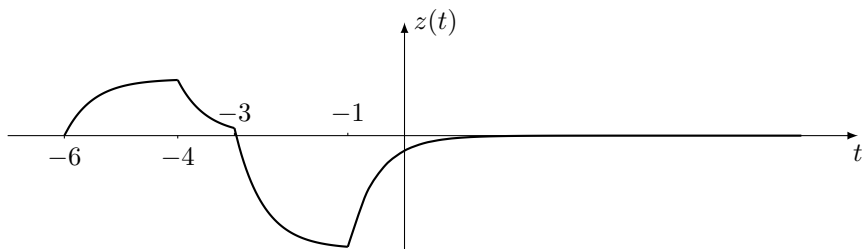
da cui si ottiene

$$z(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq -6 \\ 2 \int_{-6}^t e^{-2(t-u)} du & , -6 < t \leq -4 \\ 2 \int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)} du & , -4 < t \leq -3 \\ 2 \int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)} du - 4 \int_{-3}^t e^{-2(t-u)} du & , -3 < t \leq -1 \\ 2 \int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)} du - 4 \int_{-3}^{-1} e^{-2(t-u)} du & , -1 < t \end{cases}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq -6 \\ 1 - e^{-2(t+6)} & , -6 < t \leq -4 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} & , -4 < t \leq -3 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} - 2(1 - e^{-2(t+3)}) & , -3 < t \leq -1 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} - 2(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t+3)}) & , -1 < t \end{cases}$$

come illustrato in figura



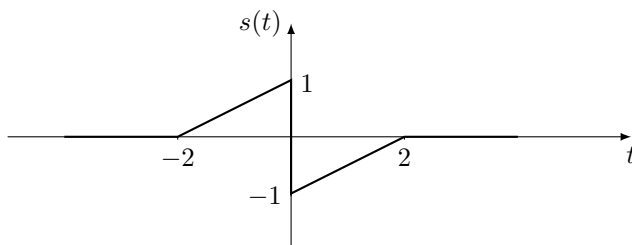
3. Si ha

$$A_x = -2 \int_0^\infty e^{-2t} dt = -1, \quad A_y = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2,$$

e per la regola dell'area $A_z = A_x \cdot A_y = -2$.

Esercizio 2 [punti 7]

Sia dato il segnale $s(t)$ illustrato in figura.



1. Calcolare la trasformata di Fourier $S(j\omega)$. [5 punti]
2. Identificare le simmetrie del segnale $s(t)$ e della trasformata di Fourier $S(j\omega)$. [2 punti]

Soluzione.

1. Possiamo procedere utilizzando la regola di derivazione, tramite cui si ottiene

$$x(t) = s'(t) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) - 2\delta(t)$$

la cui trasformata è

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{sinc}\left(\frac{4\omega}{2\pi}\right) - 2 = 2 \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right) - 1 \right) = j\omega S(j\omega)$$

Essendo il valore medio del segnale $m_s = 0$ non vi sono termini impulsivi in $S(j\omega)$, da cui

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{X(j\omega)}{j\omega} = 2 \frac{\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi/2}) - 1}{j\omega} & , \omega \neq 0 \\ A_s = 0 & , \omega = 0 \end{cases}$$

2. Il segnale ha evidentemente simmetria reale e dispari, per cui la trasformata sarà necessariamente immaginaria e dispari, come infatti è.

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo discreto LTI causale descritto dall'equazione alle differenze

$$y(n) - \frac{1}{20}y(n-1) - \frac{1}{20}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$$

1. Trovare la funzione di trasferimento. [1 punto]
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta. [2 punti]
3. Calcolare la risposta impulsiva. [3 punti]
4. Trovare i “modi” del sistema, ovvero le forme d'onda base che definiscono l'evoluzione libera. [1 punto]

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{20}z^{-1} - \frac{1}{20}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{5}z^{-1})} \\ &= \frac{20}{3} \frac{z^{-1} - 3}{z^{-2} + z^{-1} - 20} = \frac{20}{3} \frac{z^{-1} - 3}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} + 5)} \end{aligned}$$

2. I poli sono: $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = -\frac{1}{5}$, che hanno modulo minore di 1, perciò il sistema è BIBO stabile.
3. Per calcolare la risposta impulsiva si deve scomporre $H(z)$ in fratti semplici. Sostituendo $x = z^{-1}$ si ha

$$H(x) = \frac{20}{3} \frac{x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \frac{20}{3} \frac{x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{20}{27} \\ B &= \lim_{x \rightarrow -5} (x+5) \frac{20}{3} \frac{x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{160}{27} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{20}{27} \cdot \frac{1}{z^{-1} - 4} + \frac{160}{27} \cdot \frac{1}{z^{-1} + 5} \\ &= -\frac{5}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{32}{27} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{5}z^{-1}} \end{aligned}$$

che restituisce

$$h(n) = -\frac{5}{27} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{32}{27} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

con $u(n) = 1_0(n)$ gradino unitario discreto.

4. I modi del sistema sono $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$ e $\left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n)$.

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \begin{cases} \sin(n+1)x(n) + 1 & x(n) \geq 0 \\ x(n-1) & x(n) < 0 \end{cases}$$

dire se è 1) causale, 2) lineare, 3) tempo-invariante, 4) BIBO stabile.

Soluzione.

1. Il sistema è causale, poichè, per determinare $y(n)$, è sufficiente conoscere $x(n)$ e $x(n-1)$.
2. Il sistema non è lineare, a causa della condizione su $x(n)$. Ad esempio, $x_1(n) = 1$ restituisce $y_1(n) = 1 + \sin(n+1)$, $x_2(n) = -1$ restituisce $y_2(n) = -1$, mentre $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = 0$ restituisce $y(n) = 1$ che è diverso da $y_1(n) + y_2(n) = \sin(n+1)$.
3. Il sistema non è tempo-invariante, a causa della moltiplicazione per $\sin(n+1)$. Per dimostrarlo paragoniamo l'uscita traslata

$$y(n-n_0) = \begin{cases} \sin(n-n_0+1)x(n-n_0) + 1 & x(n-n_0) \geq 0 \\ x(n-n_0-1) & x(n-n_0) < 0 \end{cases}$$

con l'uscita applicata a x traslato, ovvero

$$\Sigma[x(n-n_0)] = \begin{cases} \sin(n+1)x(n-n_0) + 1 & x(n-n_0) \geq 0 \\ x(n-n_0-1) & x(n-n_0) < 0 \end{cases}$$

4. Il sistema è evidentemente BIBO stabile, infatti per $|x(n)| < L_x$ si ha

$$|y(n)| \leq \max \left(|\sin(n+1)x(n) + 1|, |x(n-1)| \right) < 1 + L_x$$

Esercizio 5 [punti 3]

Il segnale $x(t) = 2 \operatorname{sinc}^2(2t)$ viene filtrato da un filtro passa-basso con funzione di trasferimento

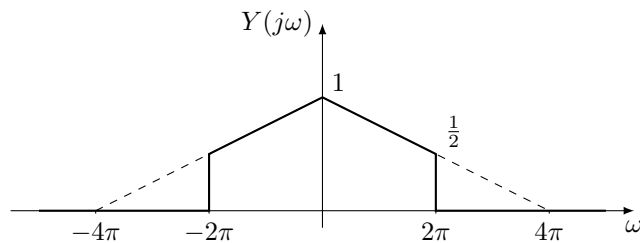
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < 2\pi \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Si identifichi l'uscita $y(t)$ del filtro.

Soluzione. Abbiamo

$$X(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{triang}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) = \operatorname{triang}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

e pertanto, $Y(j\omega)$ può essere facilmente identificata per via grafica



che analiticamente restituisce

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

e pertanto

$$y(t) = \operatorname{sinc}(2t) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(t)$$

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab si vuole calcolare la convoluzione tra il segnale $x(t) = \text{sinc}(t)$ e se stesso, $y(t) = x * x(t)$. Quali dei seguenti codici è corretto?

1. $T = 1;$
 $tx = -100 : T : 100;$
 $x = \text{sinc}(t);$
 $ty = 2 * tx(1) : T : 2 * tx(end);$
 $y = T * \text{conv}(x, x);$
2. $T = 0.01;$
 $tx = 0 : T : 10;$
 $x = \text{sinc}(t);$
 $ty = 0 : T : 2 * tx(end);$
 $y = \text{conv}(x, x);$
3. $T = 0.02;$
 $tx = -50 : T : 50;$
 $x = \text{sinc}(t);$
 $ty = 2 * tx(1) : T : 2 * tx(end);$
 $y = T * \text{conv}(x, x);$
4. $T = 0.1;$
 $tx = -1 : T : 1;$
 $x = \text{sinc}(t);$
 $ty = tx(1) : T : tx(end);$
 $y = T * \text{conv}(x, x);$

Motivare la risposta.

Soluzione.

La risposta corretta è la 3 in quanto si sceglie un passo di campionamento abbastanza piccolo, $T = 0.02$, un range abbastanza grande, $[-50, 50]$, l'estensione della convoluzione è definita correttamente come $ty = 2 * tx(1) : T : 2 * tx(end);$ e la convoluzione contiene la moltiplicazione per T .

SEGNALI E SISTEMI

3 settembre 2025

terzo appello

Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)

SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = e^{jt} \cdot \sin(2t) + e^{j3t} + \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right).$$

1. Dire se il segnale è periodico e in caso affermativo trovare il periodo fondamentale. [2 punti]
2. Nel caso non sia periodico, proporre un filtro LTI che, dato in ingresso $x(t)$, restituisca in uscita un segnale periodico (è sufficiente trovare la risposta in frequenza del filtro in questione). [2 punti]
3. Se il segnale è dato in ingresso ad un sistema LTI BIBO stabile, dire quale/i tra i seguenti segnali NON può essere ottenuto in alcun modo in uscita dal suddetto sistema LTI e motivare la risposta [3 punti]:

- $y_1 = (1 + \frac{j}{2}) \cdot e^{j3t}$
- $y_2 = e^{-jt}$
- $y_3 = \sqrt{5} \cdot e^{jt}$
- $y_4 = 0$.

Soluzione.

1. Usando le formule di Eulero si ha che

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{jt} \cdot \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + e^{j3t} + \frac{e^{j\frac{4\pi}{3}t} + e^{-j\frac{4\pi}{3}t}}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2j} + 1\right)e^{j3t} - \frac{1}{2j}e^{-jt} + \frac{1}{2}e^{j\frac{4\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi}{3}t}. \end{aligned}$$

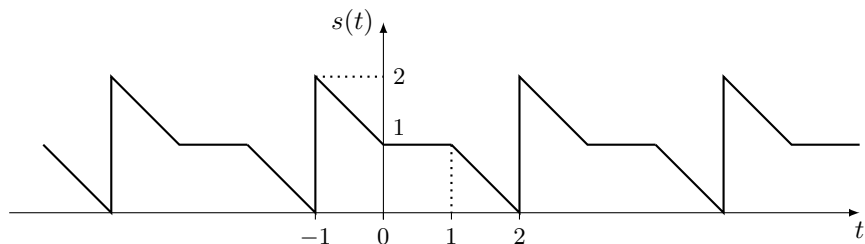
Si evidenziano quindi le pulsazioni $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$, $\omega_4 = -\frac{4\pi}{3}$, che non sono tutte in rapporto razionale tra di loro, perciò il segnale non è periodico.

2. Un filtro LTI che restituisca in uscita un segnale periodico potrebbe essere un filtro passa basso ideale che tagli le pulsazioni $\pm \frac{4\pi}{3}$ e mantenga le altre inalterate. Per esempio il filtro con risposta in frequenza $H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

3. Com'è noto dalla teoria, i sistemi LTI agiscono sui segnali esponenziali complessi modulandone ampiezza e fase; non possono invece modificarne la pulsazione. Il segnale y_3 non può quindi essere ottenuto in uscita da un sistema LTI, se l'ingresso è $x(t)$, poichè la pulsazione $\omega = 1$ non è presente nel segnale di ingresso. Al contrario i segnali y_1 , y_2 e y_4 possono essere ottenuti modulando opportunamente la risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 2 [punti 7]

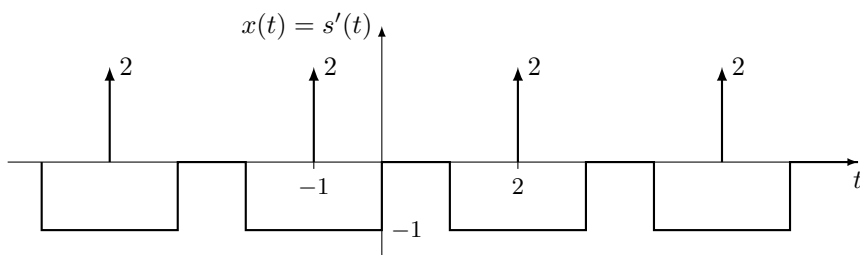
Si consideri il segnale periodico illustrato in figura.



1. Trovare i coefficienti della serie di Fourier S_k associati al segnale. [5 punti]
2. Se il segnale viene dato in ingresso ad un filtro passa-basso ideale $H(j\omega) = \text{rect}(\omega)$, qual'è l'uscita $y(t)$ dal filtro? [2 punti]

Soluzione.

1. Si può procedere tramite la regola di derivazione, osservando graficamente la forma della derivata del segnale.



da cui si ottiene

$$x(t) = s'(t) = \text{rep}_3 \left(2\delta(t-2) - \text{rect}\left(\frac{1}{2}(t-2)\right) \right)$$

Pertanto, osservando che $T_p = 3$ e quindi $\omega_0 = \frac{2}{3}\pi$, dalla regola di trasformazione di un'onda quadra con duty cycle $d = \frac{2}{3}$ e di un delta, si ottiene

$$X_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{sinc}\left(\frac{2}{3}k\right) \right) e^{-jk\omega_0 2} = \frac{2}{3} (1 - \text{sinc}(\frac{2}{3}k)) e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

e pertanto dalla regola di ricostruzione della derivata si ha

$$S_k = \begin{cases} m_s & , k = 0 \\ \frac{X_k}{jk\omega_0} & , k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \frac{1 - \text{sinc}(\frac{2}{3}k)}{j\pi k} e^{-j\frac{4\pi}{3}k} & , k \neq 0 \end{cases}$$

2. Il filtro ha pulsazione di taglio $\omega_c = 1$. Poichè $\omega_0 > 1$, il filtro lascia passare la sola componente a pulsazione nulla e si ha $y(t) = m_s = 1$.

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema LTI causale descritto dall'equazione differenziale

$$y'''(t) + 5y''(t) + 6y'(t) = -x''(t) + (1 - a) \cdot x'(t) + a \cdot x(t)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la funzione di trasferimento. [1 punto]
2. Dire per quale valore di a il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta. [2 punti]
3. Per quel valore di a , calcolare la risposta impulsiva. [2 punti]
4. Per $a = 1$ trovare un ingresso limitato che porga un'uscita illimitata. [2 punti]

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione

$$H(s) = \frac{-s^2 + (1 - a)s + a}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{(1 - s)(s + a)}{s(s + 2)(s + 3)}.$$

2. Per determinare la BIBO stabilità del sistema bisogna valutare la parte reale dei poli di $H(s)$ dopo eventuali cancellazioni con gli zeri. I poli $s = -2$ e $s = -3$ hanno parte reale negativa. Il polo in $s = 0$, avendo parte reale nulla, renderebbe il sistema non BIBO stabile. Questo però viene cancellato da uno zero nel caso $a = 0$, che è quindi il valore cercato.
3. Nel caso $a = 0$, $H(s)$ diventa

$$H(s) = \frac{(1 - s)}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

L'estrazione dei poli (semplici) porge $A = 3$, $B = -4$, da cui

$$H(s) = \frac{3}{s + 2} - \frac{4}{s + 3}, \quad h(t) = (3e^{-2t} - 4e^{-3t}) \cdot 1(t)$$

con $1(t)$ il gradino unitario.

4. Per $a = 1$ si ha

$$H(s) = \frac{(1 - s)(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

Per ottenere un'uscita illimitata con un ingresso limitato è necessario sollecitare il polo instabile $s = 0$. Ponendo infatti $x(t) = 1(t)$, si ha $X(s) = \frac{1}{s}$ e quindi

$$Y(s) = \frac{(1 - s)(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 3)}$$

Antitrasformando, si ottiene un segnale del tipo $y(t) = (c_1 t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t}) \cdot 1(t)$, che diverge.

Esercizio 4 [punti 3]

Sia dato il sistema a tempo discreto

$$y(n) = x(2 - n) + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 x(n - k) .$$

Si dica, giustificando opportunamente la risposta, se il sistema è:

1. lineare e tempo invariante (LTI) [1 punto],
2. BIBO stabile [1 punto],
3. causale [1 punto].

Soluzione.

1. Il sistema è composto da due componenti in parallelo, una che restituisce $x(2 - n)$ che non è tempo invariante in quanto

$$\underbrace{x(2 - (n - n_0))}_{\text{uscita traslata}} \neq \underbrace{x((2 - n) - n_0)}_{\text{ingresso traslato}} ,$$

ed una seconda che è un filtro a media mobile su 8 valori (un filtro) che invece è tempo invariante. Pertanto il sistema non è LTI.

2. Il sistema è invece BIBO stabile in quanto, per $|x(n)| < L_x$ si ha

$$|y(n)| \leq |x(2 - n)| + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 |x(n - k)| \leq L_x + L_x = 2L_x$$

3. Infine, il sistema non è causale per la presenza del termine $x(2 - n)$. Per $n = 0$, ad esempio, l'uscita $y(n) = y(0)$ fabbisogna del valore $x(2 - n) = x(2)$ che appartiene ai valori futuri.

Esercizio 5 [punti 3]

Sia dato il segnale

$$s(t) = \text{sinc}^3(7t) \cos(4\pi t) .$$

Quale è il più grande passo di campionamento T che garantisce una perfetta ricostruzione del segnale $s(t)$ dai campioni $s(nT)$? Si giustifichi opportunamente la risposta.

Soluzione. Ricordando la trasformata di Fourier di un sinc scalato

$$\text{sinc}(7t) \implies \frac{1}{7} \text{rect}\left(\frac{\omega}{14\pi}\right)$$

e la regola di dualità tra prodotto e convoluzione, si ottiene che il segnale $x(t) = \text{sinc}^3(7t)$ nel dominio di Fourier $X(j\omega)$ ha estensione $e(X) = [-21\pi, 21\pi]$. Poichè il segnale è modulato, nel dominio di Fourier si ha

$$S(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - 4\pi)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + 4\pi))$$

e pertanto l'estensione di $S(j\omega)$ è $e(S) = [-25\pi, 25\pi]$. Per soddisfare alle richieste del teorema di Shannon, quindi, è necessario che $25\pi \leq \pi/T$, e pertanto $T \leq \frac{1}{25}$. Il valore richiesto è pertanto $T = \frac{1}{25}$.

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori della trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ sono collezionati nel vettore complesso X di lunghezza $N = 1000$ associato a pulsazioni spaziate di un valore ω_0 e collezionate nel vettore $\omega = (-500, 499) * \omega_0$. Quale dei seguenti codici dà una rappresentazione corretta del segnale $x(t)$?

1. $T = 2\pi/(N\omega_0);$
 $x = \text{ifftshift}(\text{ifft}(X))/T;$
 $t = (0 : N - 1) * T;$
 $\text{plot}(t, \text{real}(x));$
2. $T = 2\pi/(N\omega_0);$
 $x = \text{ifft}(\text{ifftshift}(X))/T;$
 $t = (0 : N - 1) * T;$
 $\text{plot}(t, \text{real}(x), t, \text{imag}(x));$
3. $T = 2\pi/(N\omega_0);$
 $x = \text{ifft}(X)/T;$
 $t = (0 : N - 1) * T;$
 $\text{plot}(t, \text{real}(x), t, \text{imag}(x));$
4. $T = 2\pi/(\omega_0);$
 $x = \text{ifft}(\text{ifftshift}(X))/T;$
 $t = (0 : N - 1) * T;$
 $\text{plot}(t, x);$

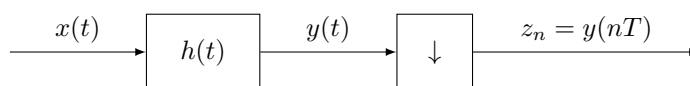
Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. La soluzione corretta è la 2. Nella 1 l'ordine di `fft` e `fftshift` è invertito, ed inoltre si presuppone che il segnale sia reale, il che non è garantito. Nella 3 non si applica `ifftshift`. Nella 4 il passo di campionamento T è errato (manca la divisione per N), inoltre il plot è errato in quanto x potrebbe avere valori complessi mentre in questo modo la sola parte reale è visualizzata.

SEGNALI E SISTEMI
2 febbraio 2026
quarto appello
 Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
 SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(t)$ viene filtrato da un filtro ideale con risposta impulsiva $h(t) = \frac{3}{2} \text{sinc}(\frac{3}{2}t)$, quindi campionato a passo $T = 1$, come illustrato in figura.



Si derivino:

1. le trasformate di Fourier dei tre segnali $x(t)$, $y(t)$ e z_n , disegnandone il loro andamento [5 punti];
2. l'andamento nel tempo dei segnali $y(t)$ e z_n [2 punti].

Soluzione.

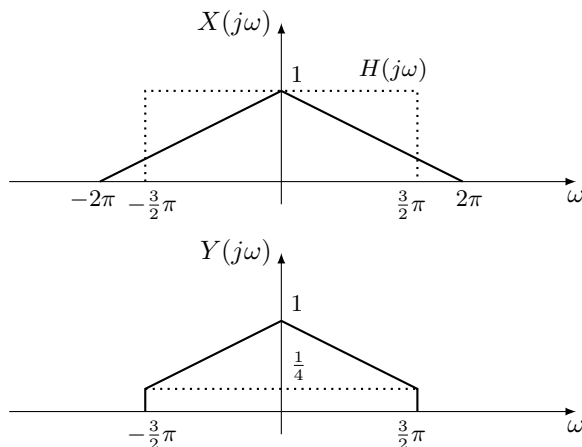
1. Per il segnale $x(t)$ la trasformata si trova dalla coppia sinc quadro/triangolo

$$X(j\omega) = \text{triangle}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

mentre per il segnale $y(t)$ si ha

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega), \quad H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{3\pi}\right)$$

dove la trasformata del filtro è stata identificata dalla coppia sinc/rect applicando la regola di scala. Il loro andamento è riportato in figura



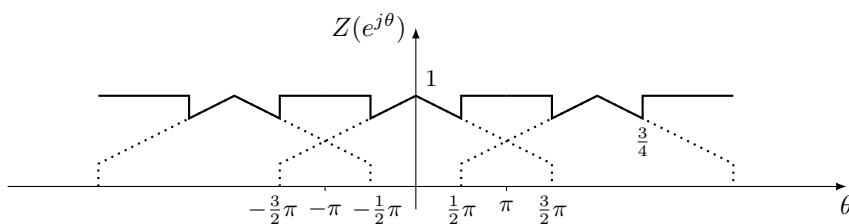
Dalla figura notiamo inoltre come

$$Y(j\omega) = \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{\omega}{3\pi}\right) + \frac{3}{4} \text{triangle}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right)$$

Per il segnale z_n abbiamo

$$Z(e^{j\theta}) = \text{rep}_{2\pi} Y(j\theta)$$

che si interpreta bene graficamente



e restituisce

$$Z(e^{j\theta}) = 1 + \frac{1}{4} \text{rep}_{2\pi} \left(\text{triang}\left(\frac{2}{\pi}\theta\right) - \text{rect}\left(\frac{1}{\pi}\theta\right) \right)$$

2. Nel tempo l'antitrasformata di $Y(j\omega)$ restituisce

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \text{sinc}\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{4}t\right) \\ &= \frac{3}{8} \text{sinc}\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{9}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{4}t\right) \end{aligned}$$

mentre

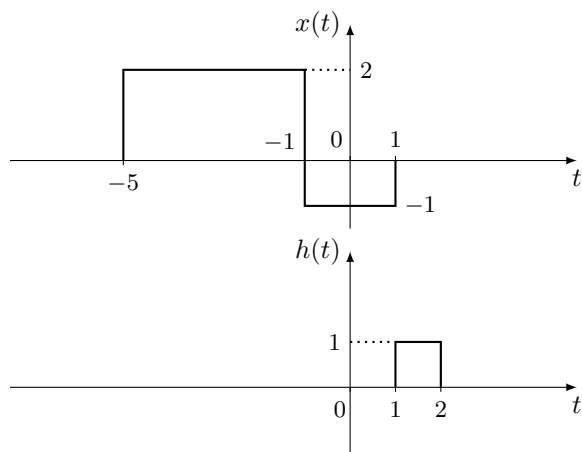
$$z_n = y(n) = \frac{3}{8} \text{sinc}\left(\frac{3}{2}n\right) + \frac{9}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{4}n\right)$$

Dalla forma di $Z(e^{j\theta})$, per antitrasformata, possiamo anche notare come

$$z_n = \delta_n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{1}{4}n\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}n\right)$$

Esercizio 2 [punti 7]

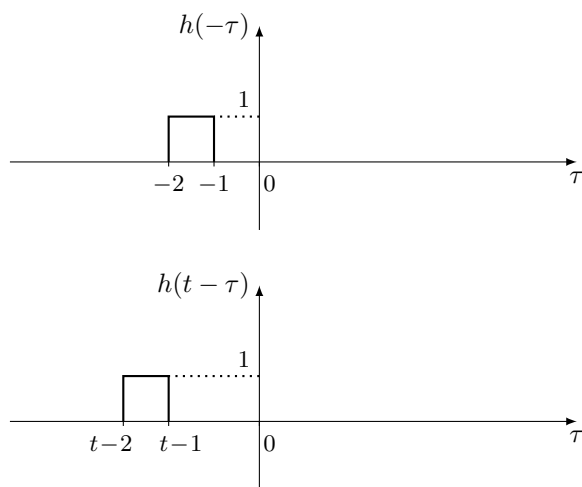
Si considerino i segnali $x(t)$ e $h(t)$ rappresentati in figura.



1. Trovare il segnale $y(t) = x(t) * h(t)$ [5 punti].
2. Dire se, per i segnali di questo esercizio, le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la risposta [2 punti]:
 - a) $x(t) * h(-t) = y(t + 3)$
 - b) $x(-t) * h(t) = y(t + 3)$

Soluzione.

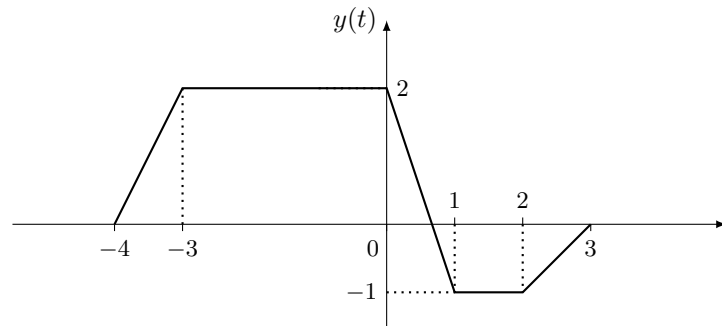
1. Si può procedere con il metodo grafico. Disegniamo innanzitutto i segnali $h(-\tau)$ ed $h(t - \tau)$



Quindi valutiamo il risultato nelle varie regioni, ovvero

- Per $t - 1 < -5$, ovvero $t < -4 \rightarrow y(t) = 0$.
- Per $t - 1 \geq -5$ e $t - 2 < -5$, ovvero $-3 \leq t < 0 \rightarrow y(t) = \int_{-5}^{t-1} 2d\tau = 2t + 8$
- Per $-3 < t \leq 0 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t-1} 2d\tau = 2$
- Per $0 < t \leq 1 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{-1} 2d\tau - \int_{-1}^{t-1} 1d\tau = -3t + 2$
- Per $1 < t \leq 2 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t-1} -1d\tau = -1$
- Per $2 < t \leq 3 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^1 -1d\tau = -3 + t$
- Per $t \geq 3 \rightarrow y(t) = 0$.

Il segnale $y(t)$ (che rispetta la regola dei supporti) è mostrato in figura.



- La prima equivalenza $x(t) * h(-t) = y(t + 3)$ è vera poichè, per il segnale $h(t)$, vale $h(-t) = h(t + 3)$. Per la proprietà di tempo-invarianza si ha che $x(t) * h(-t) = x(t) * h(t + 3) = y(t + 3)$

La seconda equivalenza $x(-t) * h(t) = y(t + 3)$ è invece falsa poichè, per il segnale $x(t)$, $x(-t) \neq x(t + 3)$.

Esercizio 3 [punti 7]

Dato il sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

con $x(n) = u(n)$ e $u(n)$ il gradino unitario discreto.

1. Trovare la funzione di trasferimento [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile [1 punto].
3. Trovare la risposta forzata $y(n)$ [3 punti].
4. Un segnale esponenziale complesso $w(n) = 3e^{j\theta_0 n}$ di pulsazione $\theta_0 = \pi$ viene dato in ingresso al sistema. Trovare l'ampiezza dell'uscita corrispondente a regime [2 punti].

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2. Vi è un unico polo in $z = \frac{1}{2}$, che ha modulo minore di 1, pertanto il sistema è BIBO stabile.
3. La trasformata zeta di $x(n)$ è

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

e pertanto quella della risposta forzata risulta

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

in cui l'espressione in fratti semplici assicura una antitrasformata

$$y(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n).$$

4. Dalla funzione di trasferimento si può trovare la risposta in frequenza del sistema

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

Per $\theta = \theta_0 = \pi$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Per la proprietà di autofunzione degli esponenziali complessi (e per la BIBO stabilità del sistema) l'uscita, a regime, ha ampiezza pari al prodotto tra l'ampiezza dell'ingresso e $|H(e^{j\theta_0})|$, ed è quindi pari a 2.

Esercizio 4 [punti 3]

Si consideri il sistema a tempo continuo definito da:

$$y(t) = \int_{t-2}^t x(\tau) d\tau + |x(t)| + x(1-t)$$

Dire se è

1. lineare e/o causale [1 punto],
2. tempo-invariante [1 punto],
3. BIBO stabile [1 punto],

motivando opportunamente le risposte.

Soluzione.

1. Il sistema NON è lineare a causa del secondo termine $|x(t)|$ che non è una funzione lineare, e NON è nemmeno causale sempre a causa dell'inversione temporale nel terzo termine $x(1-t)$.
2. Il sistema NON è tempo-invariante a causa del termine $x(1-t)$ che presenta un'inversione temporale.
3. Il sistema è invece BIBO stabile, infatti, per $|x(t)| \leq M$, $M > 0$, si ha

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{t-2}^t x(\tau) d\tau + |x(t)| + x(1-t) \right| \\ &\leq \int_{t-2}^t |x(\tau)| d\tau + |x(t)| + |x(1-t)| \\ &\leq \int_{t-2}^t M d\tau + M + M \\ &= 4M \end{aligned}$$

Esercizio 5 [punti 3]

Si consideri il segnale periodico

$$x(t) = 3e^{j\pi t} + \cos(\frac{3}{4}\pi t) - (1+j)e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2\sin(\frac{7}{4}\pi t)$$

Si chiede di

1. identificare la pulsazione comune ω_0 e la periodicità T_p [1 punto],
2. identificare i coefficienti della serie di Fourier X_k [1 punto],
3. valutare il segnale in uscita $y(t)$ da un filtro passa-alto ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{3}{2}\pi$ se il segnale di ingresso è $x(t)$ [1 punto].

Soluzione.

1. La pulsazione di riferimento è $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, secondo cui possiamo scrivere il segnale nella forma

$$x(t) = 3e^{j4\omega_0 t} + \cos(3\omega_0 t) - (1+j)e^{-j\omega_0 t} + 2\sin(7\omega_0 t)$$

e pertanto $T_p = 2\pi/\omega_0 = 8$.

2. Per ispezione da

$$x(t) = 3e^{j4\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega_0 t} - (1+j)e^{-j\omega_0 t} - je^{j7\omega_0 t} + je^{-j7\omega_0 t}$$

si ha

$$X_k = \begin{cases} 3 & , k = 4 \\ -(1+j) & , k = -1 \\ \frac{1}{2} & , k = -3, 3 \\ j & , k = -7 \\ -j & , k = 7 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

3. In questo caso rimangono le sole componenti con pulsazione maggiore di $\frac{3}{2}\pi = \frac{6}{4}\pi$, ovvero

$$y(t) = 2\sin(7\omega_0 t) = 2\sin(\frac{7}{4}\pi t) .$$

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori di un segnale $x(t)$ sono collezionati nel vettore reale x di lunghezza $N = 512$ associato ad un vettore dei tempi t spazati con passo di campionamento T noto. Quale dei seguenti codici calcola correttamente i campioni della trasformata di Fourier di $x(t)$ e ne dà una corretta rappresentazione?

1. $X = \text{fft}(T * \text{fftshift}(x));$
 $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
 $\text{semilogy}(\omega, \text{abs}(X));$
2. $X = \text{fftshift}(\text{fft}(x));$
 $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
 $\text{plot}(\omega, \text{abs}(X));$
3. $X = \text{fftshift}(\text{fft}(x));$
 $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi;$
 $\text{plot}(\omega, \text{abs}(X));$
4. $X = \text{fftshift}(T * \text{fft}(x));$
 $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
 $\text{semilogy}(\omega, \text{abs}(X)).$

Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione.

La risposta corretta la quarta. La prima è errata perchè esegue `fftshift` sul vettore x . La seconda è errata perchè non moltiplica la trasformata del vettore x per il passo di campionamento. La terza è errata perchè l'asse della pulsazioni ω manca della divisione per T .