

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA; CANALI A, B E C.
DOCENTI: LUISA FIOROT E SERGEJ MONAVARI.

I appello – 27/01/2026

DOMANDE di TEORIA

1. Dimostrare che dati U, W sottospazi di uno stesso $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale V allora l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V . (2 pti)
2. Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo. (3 pti)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + \left(\frac{4}{1+i} + 2i \right) z = 0.$$

scriverle in forma esponenziale e dire quante sono le soluzioni distinte. (2,5 pti)

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pti)
- (b) Determinare $T \leq \mathbb{R}^5$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}^5$. Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus U = U + W$. (2 pti)
- (c) Detto p_W l'endomorfismo di proiezione ortogonale su W determinare una base del $\ker(p_W)$. Esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^5$ tale che $p_W(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? (2 pti)
- (d) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 2+t \\ -4t \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W ? (1 pto)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2a - 2 & a + 1 \\ 0 & 2a - 1 & -1 \\ 0 & 2a^2 - 2a & -a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva?
Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f_a)}$ di $\text{Ker}(f_a)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f_a)}$ di $\text{Im}(f_a)$. (2 pti)
- ii) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_a e la loro molteplicità algebrica. (2 pti)
- iii) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è diagonalizzabile. (2 pti)
- iv) Posto $a = 1$ determinare H invertibile e D diagonale tali che $H^{-1}A_1H = D$. (2 pti)
- v) Determinare, se esistono, tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che f_a sia una simmetria. (1 pti)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y = -5 \\ z = 1 \end{cases}$$

1. Determinare la forma parametrica della retta r e calcolare la distanza fra la retta r e il punto P . (2 pti)
2. Determinare le equazioni cartesiane del piano π contenente la retta r passante per l'origine e del piano π' parallelo a π e passante per P . Determinare la distanza tra π e π' . (3 pti)
3. Determinare le equazioni cartesiane della retta s passante per P e per l'origine e determinare la posizione reciproca fra r ed s . (2 pti)

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato **questo foglio**. Cerchiare le risposte. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu, nera o verde)**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 45 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- **BUON LAVORO!!**