

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA; CANALI A, B E C.
DOCENTI: LUISA FIOROT E SERGEJ MONAVARI.

II appello – 18/02/2026

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni. (3p.)
2. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare. (2p.)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione e scriverle in forma trigonometrica (suggerimento: usare la forma trigonometrica per risolvere l'esercizio)

$$|z|^3 z^2 = 16\bar{z}i.$$

Quante soluzioni distinte ci sono? (2,5p.)

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : x_2 - x_3 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, equazione cartesiana per W . Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi sono in somma diretta? (3,5p.)
- (b) Determinare un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = U$. Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $v \notin U$ e $v \notin W$. Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^4$. (2,5p.)
- (c) Determinare la matrice A rispetto alla base canonica dell'endomorfismo di proiezione ortogonale sul sottospazio $U \cap W$. Tale matrice è diagonalizzabile? La matrice $B = 100A^{21} - 3A^{12} + 8A$ è diagonalizzabile? (3p.)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcolare il determinante di A e il suo nucleo. Dimostrare che -9 è autovalore di A e calcolarne il suo autospazio. (2p.)
- (ii) Determinare una matrice ortogonale $H \in O_3(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $H^t A H = D$. (2p.)

(voltare pagina)

Esercizio 4.

- (a) Si consideri un parametro reale $h \in \mathbb{R}$. Determinare la matrice A_h rispetto alle basi canoniche dell'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$\phi_h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ h-3 \\ 2 \\ h-1 \end{pmatrix}, \quad \phi_h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ h-5 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2p.)$$

(b) Determinare $\phi_h \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. (1p.)

(c) Determinare base e dimensione di $\ker \phi_4$ e $\text{Im } \phi_4$. (2p.)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino la retta r e il piano π :

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \quad \pi : x - 2y - z = 2$$

1. Determinare la posizione reciproca e la distanza tra r e π . Determinare (con equazioni cartesiane) la proiezione ortogonale della retta r sul piano π . (2,5p.)
2. Determinare tutti i piani aventi distanza $\sqrt{6}$ da π . (2p.)
3. Determinare la coppia di punti di minima distanza tra la retta r e la retta $s : \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e la distanza fra r ed s . (2p.)

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 45 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- **BUON LAVORO!!**