

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA; CANALI A, B E C.
DOCENTI: LUISA FIOROT E SERGEJ MONAVARI.

III appello – 17/07/2026

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2p.)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2p.)

ESERCIZI

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$w = \left(\frac{(3 + 2\sqrt{3}) + (3\sqrt{3} - 2)i}{3 - 2i} \right)^3$$

verificare che è un numero reale e trovare tutte le radici quinte di w (cioè tutte le soluzioni distinte $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^5 = w$). Quante radici distinte ci sono? (2,5p.)

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Trovare la dimensione e una base di U . (2p.)
- (b) Determinare la dimensione e una base di $U^\perp$. Descrivere con equazioni cartesiane il sottospazio vettoriale $U^\perp$. (2,5p.)
- (c) Dato il vettore $v = (3, -1, 1, -2)^t \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$. (2p.)
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste, trovare una sua base. (2p.)

Esercizio 3.

Si consideri l'endomorfismo f_t di $\mathbb{R}^3$ con parametro $t \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_t rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & -t \\ 0 & t+1 & 1 \\ 0 & 2-t & 2 \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_t è iniettiva? Per i valori per cui non è iniettiva, determinare una base $\mathcal{B}_{\ker(f_t)}$ del nucleo $\ker(f_t)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f_t)}$ dell'immagine $\text{Im}(f_t)$. (3p.)
- ii) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (2p.)
- iii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile. (2p.)
- iv) Posto $t = 0$, determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}A_0H = D$. (2p.)
- v) Determinare, se esistono, tutti i valori di t tali per cui il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_t . (1p.)

Esercizio 4. Nello spazio affine tridimensionale $\mathbb{R}^3$:

- (a) Determinare le equazioni cartesiane del piano π ortogonale al vettore $v = (1, 0, -2)$ e passante per il punto $A = (2, -1, 3)$. (1p.)
- (b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per i punti $B = (2, 3, 2)$ e $C = (0, 2, 1)$. (2p.)
- (c) Determinare la posizione reciproca di r e π e la loro distanza. (2p.)
- (d) Determinare l'equazione cartesiana della retta s appartenente al piano π , che passa per A ed avente giacitura ortogonale a quella di r . Determinare la posizione reciproca di r ed s . (3p.)

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 45 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- **BUON LAVORO!!**