24/11/25

lunedì 24 novembre 2025 13:15

CORREZIONE COMPITINO

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia r la retta passante per $P = (1,1,1)$ e $Q = (0,1,0)$. Sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(b) Calcolare la distanza tra le rette r ed s.

r PASSA PER $P=(1,1,1)$, $Q=(0,1,0)$

$$S = \begin{cases} x+y=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

a) $\pi \ni S$, $\pi \parallel r$

VETTORE DIRETTORE DI r: $P-Q=\vec{v}=(1,0,1)$

VETTORE DIRETTORE DI S: PRENDO 2 PUNTI SU S

$A=(0,1,-1)$. $B=(1,0,1)$

$\vec{w}=B-A=(1,-1,2)$

IL VETTORE NORMALE A π SARÀ $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{n}=(1,-1,-1)$

PRENDO UN PUNTO DI S (E QUINDI DI π), PER ES. $A=(0,1,-1)$

PRENDO UN PUNTO DI s (E QUINDI DI π), PER ES. $A=(0,1,-1)$

$$\Rightarrow \pi = 1(x-0)-1\cdot(y-1)-1\cdot(z+1)=0$$

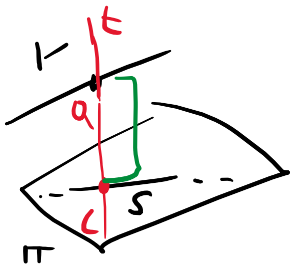
$$\Rightarrow x-y+\cancel{1}-z-\cancel{1}=0 \Rightarrow x-y-z=0$$

b) DISTANZA r, s

SICCOME π CONTIENE s LA DISTANZA TRA r e s SARÀ LA DISTANZA TRA π ED UN GENERICO PUNTO DI r

$\vec{n}=(1,-1,-1)$ VETTORE $\perp$ A π e r $\quad \pi: x-y-z=0$

$Q=(0,1,0) \in r$



$$t \perp r, \pi \Rightarrow t: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-t \end{cases}$$

$$t \cap \pi = t-(1-t)-(-t)=0$$

$$t-1+t+t \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow t\cap\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)=C$$

$$|Q-C| = \left\|(0,1,0)-\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|$$

$$\left\|\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-2n+8}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-n+5} - \ln(n^5+2)}{n+2}$

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-2n+8}\right)$

$[\infty-\infty]$ NON POSSO USARE EQ. ASINT. !

RAZIONALIZZO: $\dfrac{\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-2n+8}\right)\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2-2n+8}\right)}{\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2+2n+8}\right)}$

$\approx 2n$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}+5-\cancel{n^2}+2n-8}{2n}$

$= \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\overset{\approx 2n}{2n-3}}{2n} = 1$

b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-n+5} - \ln(n^5+2)}{n+2}$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-n+5}}{n+2} - \dfrac{\ln(n^5+2)}{n+2}$

$n \to +\infty$ $\underbrace{\quad n+2 \quad}_{A}$ $\underbrace{\quad n+2 \quad}_{B}$

$$A: \sqrt[3]{n^2-n+5} \approx n^{\frac{2}{3}}$$

$$n+2 \approx n$$

$$A \approx \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} = 0 \qquad \ln(n^A) << n$$

$$B: -\frac{\ln(n^5+2)}{n+2} \approx -\frac{\ln(n^5)}{n} \approx -\frac{5\ln(n)}{n}$$

PERCHÉ $\ln(n) << n$ ASINT. $\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A - B = 0$$

Esercizio 3. Determinare se le seguenti serie convergono:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3+5}}{\ln(n)+\sqrt{n^3-n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2+2n+3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3+5}}{\ln(n) + \sqrt{n^3-n}}$$

$$2\sqrt{n^3+5} \approx 2n^{\frac{3}{2}} \qquad \ln(n) << n$$

$$\ln(n) + \sqrt{n^3-n} \approx \ln(n) + n^{\frac{3}{2}} \approx n^{\frac{3}{2}}$$

$$\approx \sum \frac{2\cancel{n^{\frac{3}{2}}}}{\cancel{n^{\frac{3}{2}}}} = \infty$$

PER CRITERIO ASINT. DIVERGE

b) $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+2n+3}$ È A SEGNI ALTERNI $n>0$

LEIBN. : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+2n+3} = 0$ OK

$\frac{n}{n^2+2n+2}$ È DECRESCENTE PERCHÉ

$n < n^2+2n+2 \quad \forall n \geq 0$ E

n^2+2n+2 È CRESCENTE

$\Rightarrow$ CONV. PER LEIBN.

c) $\sum \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$. $a_{n+1} = \frac{2^{n+3}}{(n+2)!}$

RAPPORTO: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\cancel{n+3}}}{\cancel{(n+2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{2^{\cancel{n+2}}}$

$= \frac{2}{n+2}$ $\quad$ (*) $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0$ ok $\Rightarrow$ CONV. PER CRIT. DEL RAPPORTO

Esercizio 4. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ RICORDO CHE $\sum_0^{\infty} (q)^n = \frac{1}{1-q}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^1$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{4} - 1 - \frac{1}{5} =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ ✓

Esercizio 5. Determinare dominio, segno, eventuali simmetrie, eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui e i limiti agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$

(b) $f(x) = (x^2-1)e^{\frac{1}{x}}$

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$

DOMINIO: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$\frac{x^2-4}{x^2} > 0$$

$x^2 - 4 > 0 \iff x > 2 \vee x < -2$

$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
N	+		−		+
D	+		+		+

$\Rightarrow x > 2 \vee x < -2$

DOMINIO: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$. SIMMETRIE: $f(-x) = \ln\left(\dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^2}\right) =$

$$= \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) = f(x)$$

PARI !

SEGNO: $\ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) \geq 0 \iff$

$$\frac{x^2-4}{x^2} \geq 1 \iff \cancel{x^2}-4 \geq \cancel{x^2} \iff -4 \geq 0$$

$\Rightarrow$ MAI, LA FUNZIONE È SEMPRE < 0

LIMITI E ASINTOTI:

PERCHÉ PARI !

$$\lim_{x \to -\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)$$

$$x^2-4 \sim x^2 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \ln(1) = 0^-$$

A.O. $y=0$

$$\lim_{x \to -2^-} = \lim_{x \to 2^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) = -\infty$$

A.V. $x=-2$, $x=2$.

b) $f(x) = (x^2-1)\,e^{\frac{1}{x}}$

DOMINIO: $x \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

SIMMETRIE: $f(x) = (x^2-1)\, e^{-\frac{1}{x}}$ NÉ PARI NÉ DISPARI

SEGNO: $(x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0$

$\hookrightarrow e^{\frac{1}{x}} > 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \ \vee \ x \leq -1$

LIMITI E ASINT.: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot e^{0^+}] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot e^{0^-}] = +\infty$

OBLIQUI? $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

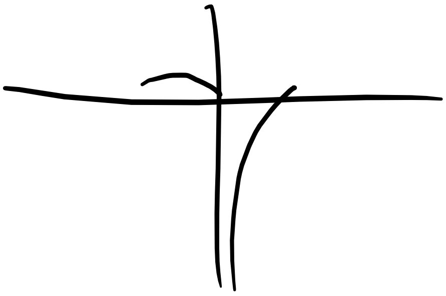
$= [(\infty - 0)\, e^{0^+}] = +\infty$

IDEM A $-\infty \Rightarrow$ NO A. OBL.

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}} = [-1 \cdot \underbrace{e^{-\infty}}_{0}] = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2-1)\, e^{\frac{1}{x}} = [-1 \cdot e^{+\infty}] = -\infty$ A.V.

$x = 0$ è A.V. (SOLO A DX)



$$(4) \quad \int x^2 \sin(x^3+1)\,dx;$$

$$17) \quad \int \frac{1}{x^3} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$$

$$17 \quad \int \frac{1}{x^3} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-3}{x^4} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{3}{x^4}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= -\frac{3}{x^4} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \int \frac{3}{x^5}\,dx$$

$$-\frac{3}{x^4} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3\int x^{-5}\,dx$$

$$= -\frac{3}{x^4} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3\,\frac{x^{-4}}{-4}$$

$$- \frac{\;}{x^4} \ln\left|\frac{1}{x}\right| - \frac{\;}{-4}$$

$$= -\frac{3}{x^4} \ln\left|\frac{1}{x}\right| - \frac{3}{4x^4}$$

$$\int x^2 \sin(x^3+1)\, dx$$

$$t = x^3+1$$

$$dt = 3x^2\, dx$$

$$\int \frac{\sin(t)}{3}\, dt = \frac{1}{3} \int \sin(t)\, dt$$

$$-\frac{\cos(t)}{3} \rightsquigarrow -\frac{\cos(x^3+1)}{3}$$

Exercizio 4. Provare che per ogni coppia di funzioni f e g si ha $(f+g)' = f' + g'$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) \, dx$$

$$\int x \sin(x) \, dx = -x \cdot \cos(x) - \int \cos(x) \, dx$$

$$-x \cos x + \sin x + c$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot x \, dx = -x \cos x + \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\pi \cdot \underset{\underset{-1}{\downarrow}}{\cos \pi} + \underset{\underset{\text{-}}{\downarrow}}{\sin \pi} - (\pi \cdot \underset{\downarrow}{\cos(-\pi)} + \underset{\downarrow}{\sin(-\pi)})$$

$$- \pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\sin \pi}_{0} - \left(\pi \cdot \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right)$$

$$\pi - (-\pi) = 2\pi$$