EQ. DIFF. DI 2° GRADO NON OMOGENEE

$ay'' + by' + cy = f(x)$

STUDIAMO SOLO IL CASO $f(x) = q_r(x) e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$q_r(x)$ POL. DI GRADO r

COME PER LE EQ. NON OMOG. DI GRADO 1 LA SOL. GEN. DI UN'EQ. NON OMOG. SARÀ LA SOMMA DELLA SOL. DELL'OMOG. ASSOCIATA PIÙ UNA SOL. PARTICOLARE

SOL. PARTICOLARE: $x^k p_r(x) e^{\lambda x}$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{SE } \lambda \text{ NON È RADICE DEL POL. CAR.} \\ 1 & \text{SE } \lambda \text{ È } \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ 2 & \text{SE } \lambda \text{ È } \text{"} \text{ DOPPIA } \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

ES 1

(b) $y'' - y = xe^x$

$y'' - y = xe^x$ $\qquad q_r(x) = x$, $r = 1$, $\lambda = 1$

SOL OMOG: $y'' - y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$

$r_1 = 1$, $r_2 = -1 \Rightarrow y = k_1 e^x + k_2 e^{-x}$

SOL. PARTICOLARE: SOLUZIONI TIPO $x^k q_r(x) e^{\lambda x}$

CON: $\cdot\ \nu = 1 \Rightarrow q_\nu$ È POL. DI 1° GRADO $\Rightarrow q_\nu = ax + b$

$\cdot\ \lambda = 1$

$\cdot\ K = 1$ PERCHÉ $\lambda = 1$ È RADICE DI $x^2 - 1$

$$\Rightarrow y = x \cdot (ax+b) e^x \Rightarrow y = ax^2 e^x + bxe^x$$

TROVO a e b: $y' = a(2xe^x + e^x x^2) + b(e^x + xe^x)$

$$= 2axe^x + ax^2e^x + be^x + bxe^x$$

$$y'' = 2a(e^x + xe^x) + a(2x + x^2 e^x) + be^x + b(e^x + xe^x) =$$

$$= 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x + 2be^x + bxe^x$$

ORA SO: $y'' - y = xe^x$

$$2ae^x + 4axe^x + \cancel{ax^2e^x} + 2be^x + \cancel{bxe^x} - (\cancel{ax^2e^x} + \cancel{bxe^x}) = xe^x$$

$$e^x(2a+2b) + xe^x(4a) = xe^x$$

DOVRÒ AVERE QUINDI: $\begin{cases} 2a+2b = 0 \\ 4a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad b = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{4}xe^x$$

SOL: $y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^x - \frac{1}{4}xe^x$

ES 1 (d) $6y'' - 5y' + y = x^2 + 1$

ES 2

(a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x+1) \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$6y'' - 5y' + y = x^2 + 1$

OMOG. ASS: $6y'' - 5y' + y = 0$

$\rightsquigarrow 6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$

$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{3}$

SOL: $y = K_1 e^{\frac{1}{2}x} + K_2 e^{\frac{1}{3}x}$

$q_r(x) = x^2 + 1, \quad r = 2, \quad \lambda = 0 \Rightarrow K = 0$

SOL. DEL TIPO: $x^0 \cdot (ax^2 + bx + c) \cdot e^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$

$\Rightarrow 6 \cdot (2a) - 5(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$

$\Rightarrow 12a - 10ax - 5b + ax^2 + bx + c = x^2 + 1$

$x^2(a) + x(-10a + b) + 12a - 5b + c = x^2 + 1$

HO : $\begin{cases} a=1 \\ -10a+b=0 \\ 12a-5b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \\ 12-5(10)+c=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \\ c=39 \end{cases}$

$\Rightarrow$ SOL: $x^2+10x+39$

$\Rightarrow y = k_1 e^{\frac{1}{2}x} + k_2 e^{\frac{1}{3}x} + x^2+10x+39$

$$\begin{cases} y''-3y'+2y = e^{2x}(3x+1) \\ y(0)=4 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

OMOG. ASS: $y''-3y'+2y=0 \rightsquigarrow x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow r_1=2,\ r_2=2$

$y = k_1 e^{2x} + k_2 e^{x}$

$q_r(x) = 3x+1,\ r=1,\ \lambda=2 \Rightarrow k=1$

SOL: $y = x(ax+b)e^{2x}$

$y' = 2axe^{2x} + 2ax^2e^{2x} + be^{2x} + 2bxe^{2x}$

$y'' = 2ae^{2x} + 8axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 4be^{2x} + 4bxe^{2x}$

$$y'' = 2ae^{2x} + 8axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 4be^{2x} + 4bxe^{2x}$$

$$40: \; y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x+1)$$

$$2ae^{2x} + 8axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 4be^{2x} + 4bxe^{2x}$$
$$-3\left(2axe^{2x} + 2ax^2e^{2x} + be^{2x} + 2bxe^{2x}\right)$$
$$+2\left(ax^2e^{2x} + bxe^{2x}\right) = 3xe^{2x} + e^{2x} \dots$$

$$e^{2x}(2a+b) + xe^{2x}(8a+4b-6a-6b+2b)$$
$$\text{''} \qquad + xe^{2x}(2a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b = 1 \\ 2a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\tfrac{3}{2}x - 2\right)e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y = K_1e^{2x} + K_2e^{x} + x\left(\tfrac{3}{2}x - 2\right)e^{2x}$$

- $y(0) = 4: \; K_1 + K_2 = 4$
- $y'(0) = 2: \; y' = 2K_1e^{2x} + K_2e^{x} - xe^{2x} + 3x^2e^{2x} - 2e^{2x}$

$$y'(0) = 2: \; 2K_1 + K_2 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = 4 \\ 2K_1 + K_2 = 4 \end{cases}$$

$-k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 4$

$y = 4e^{x} + x\left(\frac{3}{2}x - 2\right)e^{2x}$ ✓

FUNZIONI A 2 VARIABILI

RICORDIAMO: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$

INOLTRE: $\left|\frac{\partial}{\partial v} f(x,y)\right| = \left|\nabla f(x,y)\right| \cos(\theta)$, θ ANGOLO TRA f E v

(MAGGIOR VARIAZIONE: $\cos(\theta) = 1$, MINOR VARIAZ: L'OPPOSTO)

PIANO TG. AD f IN a,b: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y} f(a,b)(y-b)$

3. Per ogni delle seguenti funzioni e punti indicati, si trovi la direzione di maggiore variazione positiva e di maggiore variazione negativa della funzione. Si trovi inoltre l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico in quel stesso punto.

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P = (-1,1)$;
   (b) $g(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin(y)$, $P = (1,0)$;

a) $x^2 + xy + y^2$ $P = (-1, 1)$

a) x^2+xy+y^2, $P=(-1,1)$

$\nabla f(x,y) = (2x+y, 2y+x)$ $\quad -v \sim (1,-1)$ MINOR VAR.

$\nabla f(-1,1) = (-1, 1) = v$ DIREZ. DI MAGGIOR VARIAZIONE

PIANO: $z = f(-1,1) + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x+1) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-1)$

$z = -x+y-1$

b) $x^2 y + e^{xy}\sin(y)$, $P=(1,0)$

$\nabla f(x,y) = (2xy + \sin(y)\cdot y e^{xy}, x^2 + x e^{xy}\sin(y) + e^{xy}\cos(y))$

$\nabla f(1,0) = (0, 2) = v$ MAX VAR

$(0,-2) = -v$ MIN. VAR.

PIANO: $z = 2y$

4. Per le seguenti funzioni di dominio contenuto in $\mathbb{R}^2$, si trovino il dominio e punti stazionari.

(a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 24$

DOMINIO: CHIARAMENTE TUTTO $\mathbb{R}$

DOMINIO: CHIARAMENTE TUTTO $\mathbb{R}$

PUNTI STAZIONARI (CRITICI) = $\nabla f(x,y) = 0$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (8x+8, 18y-36)$

$\Rightarrow 8x+8=0 \Rightarrow x=-1$

$18y-36=0 \Rightarrow y=2$ $\Rightarrow P=(-1,2)$

PUNTO STAZ.