EQ. DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$ay'' + by' + cy = 0$$

CAMBIO AULA 22/12 :
AULA H
CENTRO INTERCHIMICO

MI RICONDUCO A : $ax^2 + bx + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: HO DUE RADICI REALI r_1 e r_2 $\Rightarrow$ LE SOL. DELL' EQ. DIFF. SONO :

$$K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

- $\Delta = 0$: HO UNA SOLA RADICE REALE r_1 $\Rightarrow$ LE SOL. DELL'EQ. DIFF SONO :

$$K_1 e^{r_1 x} + K_2 x e^{r_1 x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

- $\Delta < 0$: HO DUE RADICI COMPLESSE CONIUGATE: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$
LE SOL. DELL' EQ. DIFF. SONO :

$$K_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + K_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

ES 4 (a) $y'' - 2y' + y = 0$

$$y'' - 2y' + y = 0 \rightsquigarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (x-1)^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$r_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ SOL. SONO $K_1 e^{r_1 x} + K_2 x e^{r_1 x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = K_1 e^{x} + K_2 x e^{x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

ES 4

(b) $y'' - y = 0$

(c) $4y'' + y = 0$

b) $y'' - y = 0 \rightsquigarrow x^2 - x = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(0) = 1 > 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 0$

$\Rightarrow$ SOL: $y = K_1 e^{x} + K_2 e^{0} \Rightarrow K_1 e^{x} + K_2$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

c) $4y'' + y = 0 \rightsquigarrow 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = -1$

$x^2 = -\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{0 \pm \sqrt{-4(4)}}{8} = \dfrac{\pm\sqrt{-16}}{8} \rightsquigarrow \pm \dfrac{4i}{8} = \pm \dfrac{1}{2} i$

$y = K_1 e^{0 \cdot x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + K_2 e^{0 \cdot x} \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) \rightsquigarrow K_2 \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) = -K_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $6y'' - 5y' + y = 0$

ES 4)

(e) $y'' + y' = 0$

ES 4)

(e) $y'' + y' = 0$

(f) $y'' - 2y = 0$

$-K_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\shortparallel$

$K_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

d) $6y'' - 5y' + y = 0 \rightsquigarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 4(6)(1) = 1 > 0$

$r_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ SOL: $y = K_1 e^{\frac{1}{2}x} + K_2 e^{\frac{1}{3}x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

e) $y'' + y' = 0 \rightsquigarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$

2 SOL REALI: $r_1 = 0$, $r_2 = -1$

SOL: $y = K_1 e^{-x} + K_2$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

f) $y'' - 2y = 0 \rightsquigarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$

2 SOL. REALI: $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$

SOL: $y = K_1 e^{\sqrt{2}x} + K_2 e^{-\sqrt{2}x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

5. Si risolvino i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$y'' - 3y' + 2y = 0 \rightsquigarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$

$r_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1$

$\Rightarrow$ SOL: $y = K_1 e^{2x} + K_2 e^{x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

1^a CONDIZIONE: $y(0) = 4$: $K_1 e^{2 \cdot 0} + K_2 e^{0} = 4$

$\Rightarrow K_1 + K_2 = 4$

2^a CONDIZIONE: $y'(0) = 2$: $y' = 2K_1 e^{2x} + K_2 e^{x}$

$\Rightarrow 2K_1 e^{2 \cdot 0} + K_2 = 2 \Rightarrow 2K_1 + K_2 = 2$

METTO A SISTEMA: $\begin{cases} K_1 + K_2 = 4 \\ 2K_1 + K_2 = 2 \end{cases}$

$$-k_1 + 0 = 2 \Rightarrow k_1 = -2$$

$$\Rightarrow -2 + k_2 = 4 \Rightarrow k_2 = 6$$

SOL: $y = -2e^{2x} + 6e^{x}$

b) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$$y'' + 2y' + y = 0 \rightsquigarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$\rightsquigarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow$ UNA SOL. REALE $r_1 = -1$ $(\Delta = 0)$

$$\Rightarrow y = k_1 e^{-x} + k_2 x e^{-x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

1^a CONDIZIONE: $y(0) = 1 \Rightarrow k_1 e^{0} + k_2 \cdot 0 \cdot e^{0} = 1$

$$\Rightarrow k_1 = 1$$

2^a CONDIZIONE: $y'(0) = 2$: $y' = -k_1 e^{-x} + k_2 \dfrac{1-x}{e^x}$

$$\Rightarrow -k_1 e^{0} + k_2 \frac{1-0}{e^0} = 2$$

$$\Rightarrow -k_1 + k_2 = 2$$

METTO A SISTEMA $\begin{cases} k_1 = 1 \\ -k_1 + k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow y = e^{-x} + 3x e^{-x}$$

6. Le seguenti affermazioni sono vere o false? Si giustifichino le risposte.

(a) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di primo ordine omogenea, allora la loro somma $f(x)+g(x)$ è anche una soluzione.

(b) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti omogenea, allora la loro somma $f(x)+g(x)$ è anche una soluzione.

(c) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di primo ordine non-omogenea, allora la loro somma $f(x)+g(x)$ è anche una soluzione.

(d) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti non-omogenea, allora la loro somma $f(x)+g(x)$ è anche una soluzione.

(e) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di primo ordine non-omogenea, allora la loro differenza $f(x)-g(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

(f) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluzioni di un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti non-omogenea, allora la loro differenza $f(x)-g(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

a) EQ. 1° ORDINE OMOG.: $y' + a(x)y = 0$

SOL. SONO DEL TIPO $ke^{-A(x)}$, $A(x) = \int a(x)dx$

$f = k_1 e^{-A(x)}$, $g = k_2 e^{-A(x)}$

$\Rightarrow f+g = k_1 e^{-A(x)} + k_2 e^{-A(x)} = \overbrace{(k_1+k_2)}^{k} e^{-A(x)}$

$= ke^{-A(x)}$ È SOLUZIONE! VERO!

b) EQ. 2° ORDINE A COEFF. COST. OMOGENEA

$ay'' + by = 0 \rightsquigarrow a\lambda^2 + b\lambda \rightsquigarrow \lambda(a\lambda+b)$

$\Rightarrow$ 2 SOL. REALI: $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \quad f: \bar{k}_1 e^{-\frac{b}{a}x} + \bar{k}_2$

$g: k_1' e^{-\frac{b}{a}x} + k_2'$

$f+g: (\bar{k}_1 + k_1') e^{-\frac{b}{a}x} + \underbrace{\bar{k}_2 + k_2'}$

$$f+g: \underbrace{(k_1+k_1')}_{k_1} e^{-\frac{b}{a}x} + \underbrace{k_2+k_2'}_{k_2}$$

$$\Rightarrow k_1 e^{-\frac{b}{a}x} + k_2 \qquad \text{VERO!}$$

c) EQ. LIN. DI 1° ORDINE NON OMOGENEA

$$y' + a(x)y = f(x)$$

$$\text{SOL}: k e^{-A(x)} + \underbrace{k(x)}_{\int f(x)\cdot e^{A(x)}dx} e^{-A(x)} = e^{-A(x)}\left(k + k(x)\right), \; k \in \mathbb{R}$$

$$f: k_1 e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}$$

$$g: k_2 e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}$$

$$f+g: \underbrace{(k_1+k_2)}_{k} e^{-A(x)} + 2k(x) e^{-A(x)}$$

$$: k e^{-A(x)} + \underbrace{2k(x)}_{!} e^{-A(x)} \qquad \text{FALSO!}$$

d) EQ. DI 2° ORDINE A COEFF. COST. NON OMOGENEA

$$ay'' + by' + cy = h(x)$$

$$f \text{ e } g \text{ SOLUZIONI}: \begin{cases} af'' + bf' + cf = h(x) \\ ag'' + bg' + cg = h(x) \end{cases}$$

$$\text{SOMMO}: a(f''+g'') + b(f'+g') + c(f+g) = 2h(x)$$

MA SE $(f+g)$ FOSSE SOLUZIONE AVREI

$$a(f''+g'')+b(f'+g')+c(f+g) = \underset{2h(x)}{\overset{}{h(x)}}$$

$$\neq 2h(x)$$

FALSO!

e) COME IL PUNTO c)

$$f: k_1 e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}$$

$$g: k_2 e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}$$

VERO

$$f-g: \underbrace{(k_1-k_2)}_{k} e^{-A(x)} \Rightarrow k e^{-A(x)}$$

f) COME d)

RISULTEREBBE

$$a(f''-g'')+b(f'-g')+c(f-g) = 0$$

VERO

(g) La funzione $y=0$ è soluzione di qualunque equazione differenziale separabile.

(h) La funzione $y=0$ è soluzione di qualunque equazione differenziale di primo ordine omogenea.

(i) La funzione $y=0$ è soluzione di qualunque equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti omogenea.

(j) La funzione $y=0$ è soluzione di qualunque equazione differenziale di primo ordine non-omogenea.

(k) La funzione $y=0$ è soluzione di qualunque equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti non-omogenea.

g) EQ. SEP. $y' = y \cdot f(x) \Rightarrow y=0$ È SOL.

h) 1° ORDINE OMOG: $y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y=0$ È SOL.

i) 2° ORDINE OMOG: $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow y=0$ È SOL.

j) 1° ORDINE NON OMOG: $y' + a(x)y = f(x) \Rightarrow y=0$ NON È SOL. SE $f(x) \neq 0$

k) 2° ORDINE NON OMOG: $ay'' + by' + cy = h(x)$
$\Rightarrow y=0$ NON È SOL. SE $h(x) \neq 0$.