COMPITINO 15/11/24

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia r la retta passante per $P = (1, 1, 0)$ e $Q = (0, -1, 1)$. Sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana di r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche di s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(d) Trovare la proiezione ortogonale del punto $R = (0, 1, 1)$ sul piano π.

$P = (1,1,0)$, $Q = (0,-1,1)$, $s = \begin{cases} x+y=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

r

1): CALCOLO IL VETT. DIRETTORE RETTA: $\vec{v} = P - Q =$

$= (1,1,0) - (0,-1,1) = (1,2,-1)$.

PRENDIAMO UNO DEI 2 PUNTI (P o Q, IO PRENDO P)

ED IL SISTEMA SARÀ: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} \\[2mm] \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-0}{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = y-1 \\ y-1 = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

2) $s = \begin{cases} x+y=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ SCELGO UNA QUALSIASI DELLE INCOGNITE (x,y,z) E LA PONGO $=t$

$s = \begin{cases} x=t \\ t+y=1 \\ t-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-y+t \end{cases}$

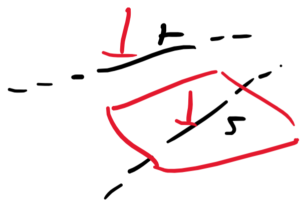
SOSTITUISCO UNA DELLE ALTRE NELL'ULTIMA

(EX: SOSTITUISCO $y = 1-t$ NELL'EQ $z = -y+t$)

(EX: SOSTITUISCO $y=1-t$ NELL'EQ $z=-y+t$)
(VOGLIO TUTTO IN FUNZIONE DI t!!)

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-(1-t)+t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

3) EQUAZIONE CARTESIANA DI π CONTENENTE RETTA s E $/\!/\, r$.



IL VETTORE DIREZIONE DI r È $(1,2,-1)=\vec{v}$

IL VETTORE DIREZIONE DI s È

$s_0\,(t=0)=(0,1,-1)$, $s_1=(1,0,1)$ $\qquad P+\langle\vec{v}\rangle$

$\vec{w}=s_0-s_1=(-1,1,-2)$

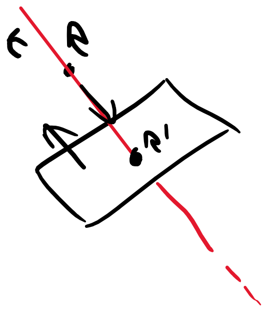
IL VETTORE NORMALE AL PIANO SARÀ $\perp$ A $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{w}=(1,-1,-1)$

E QUINDI π: $1\cdot(x-0)-1(y-1)-1\cdot(z+1)=0$

$\Rightarrow x-y-z=0$

d) $R=(0,1,1)$. TROVA PROIEZ. ORTOG. SU π.



VOGLIO RETTA PASSANTE PER R e $\perp$ A π

$\Rightarrow$ VETTORE DIREZIONE RETTA = VETTORE NORMALE AL PIANO: $(1,-1,-1)$

$$\Rightarrow t=\begin{cases} x=0+t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=y \end{cases}$$

METTO A SISTEMA: $t\cap\pi$: $\begin{cases} y=1-x \\ z=y \\ x-y-z=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ z = y \\ x-(1-x)-(1-x)=0 \leadsto x-1+x-1+x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-5}+\sqrt{n^2+8}}{n+3}$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3-n-3}-\ln(n^3+2)}{n^2+2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2e^n}{n+e^{2n}}$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-5}+\sqrt{n^2+8}}{n+3} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\sqrt{n^2-5} \approx n$ $\left(\approx \sqrt{n^2}\right)$, $\sqrt{n^2+8} \sim n$, $n+3 \sim n$

$\displaystyle\leadsto \lim_{n\to+\infty} \frac{n+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3-n-3}-\ln(n^3+2)}{n^2+2} = \left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right]$

$\sqrt[4]{n^3-n-3} \approx \sqrt[4]{n^3} = n^{\frac{3}{4}}$

$\ln(n^3+2) < n^2$ ASINT.

$\displaystyle\approx \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^2+2} - \frac{\ln(n^3+2)}{n^2+2}$

$\to 0$ $\quad$ $\to 0$

$\approx n^2$

$= 0$

c) $\displaystyle\lim \frac{n^2e^n}{\ldots}$ $\quad \frac{\infty\cdot\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

$n+e^{2n} \approx e^{2n}$ $\quad (e^{2n} \gg n)$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 e^n}{n+e^{2n}}$ $\nearrow \infty + \infty$ $n+e^{2n} \approx e^{2n}$ $(e^{2n} >> n)$

$\nearrow e^n >> n^2$

$\approx \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \cancel{e^n}}{e^{\cancel{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$

Esercizio 3. Determinare se le seguenti serie convergono:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\ln(n)+25}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{n^3+n^2+1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$.

a) $\sum \dfrac{n+5}{\ln(n)+25}$. NOTO $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+5}{\ln(n)+25} = +\infty$ $(\ln(n) << n)$ PER IL CRITERIO DI CONV...

$\dfrac{n}{\ln(n)} = \infty$

QUINDI DIVERGE.

b) $\sum \dfrac{\sqrt{n^3+2n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{n^3+n^2+1}$ $\qquad \sum \dfrac{n}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$

$\sqrt{n^3+2n-1} \approx \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{n^2-n+1} \approx \sqrt{n^2} = n$

$> n^{\frac{3}{2}} + n \approx n^{\frac{3}{2}}$

$3 - \frac{3}{2} =$

$n^3+n^2+1 \approx n^3$

QUINDI $\approx \sum \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} = \sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ CONVERGE $(\frac{3}{2} > 1)$

E PER CRITERIO ASINTOTICO ANCHE LA SERIE INIZIALE CONVERGE.

c) $\sum \frac{4^n}{(n+1)!}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}$

CRITERIO RAPPORTO: $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\cancel{n+1}}}{(n+2)!} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{4^n}}$

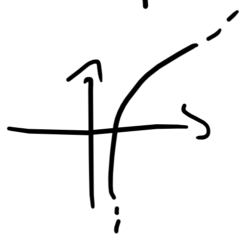
$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n+2} = 0$ $\qquad (n+2)! = (n+2)(n+1)!$

$\Rightarrow$ LA SERIE CONV

d) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$ SERIE A TERMINI ALTERNI

($\ln(n+3) > 0 \ \forall n \geq 0$ e $(-1)^n$ CAMBIA SEGNO)

LEIBNIZ: $\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+3)} = 0$ OK



$\cdot \ \frac{1}{\ln(n+3)}$ È DECRESCENTE IN QUANTO $\ln(n+3)$ È FUNZIONE CRESCENTE E STA A DENOMINATORE

$\Rightarrow$ PER IL CRIT. DI LEIBNIZ LA SERIE CONVERGE.

Esercizio 4. Definiamo la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}.$$

Determinare il dominio D, il segno di $f(x)$ (ovvero quando $f(x) \geq 0$ e quando $f(x) \leq 0$) le eventuali simmetrie (funzione pari o dispari), i limiti agli estremi di D, gli eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, ~~scrivere la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ e studiare crescenza e decrescenza di $f(x)$~~. Tracciare il grafico della funzione $f(x)$ utilizzando le informazioni raccolte.

$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

$\cdot$ DOMINIO: $x \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad e^{\frac{1}{x}}$ SEMPRE POSITIVA!

$\cdot$ SEGNO: $(x-1)e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

· SIMMETRIE: $f(-x) = (-x-1)e^{-\frac{1}{x}} \neq f(x)$ NÉ PARI NÉ DISPARI

$-(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \neq -f(x)$

· $\lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot 1] = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

NO A.O.

OBLIQUI? $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 = m$

$\lim_{x\to\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x = 0 \Rightarrow$ ASINTOTO OBLIQUO

$\approx x - x = 0$

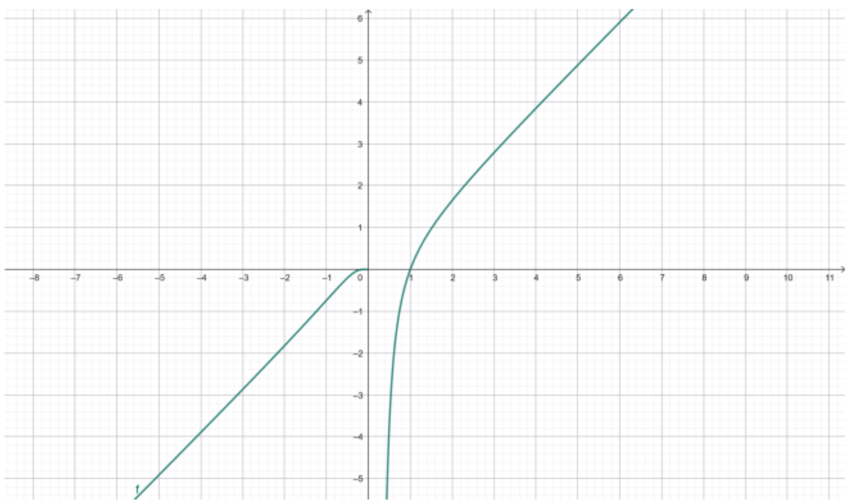
$(x-1)e^{\frac{1}{x}} \approx x \quad \lim_{x\to\infty} x - x = 0$

$y = mx + q \Rightarrow y = x$

$\lim_{x\to 0^-} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = \left[-1 \cdot \frac{1}{e^{\infty}}\right] = 0 : \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \quad e^{\frac{1}{0^-}} \to -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = [-1 \cdot e^{\infty}] = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$

$\Rightarrow x = 0$ A.V. (SOLO DA DX)



COMPITINO 25/11/22

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono dati i punti $A = (0, 2, -1)$ e $B = (4, 0, 1)$.

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A e B.

(b) Sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Verificare che le rette r e s sono parallele.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s.

(d) Determinare il punto R sulla retta r di minima distanza dal punto $P = (-1, 0, 5)$.

(e) Determinare il punto H sul piano π di minima distanza dal punto $P = (-1, 0, 5)$.

(f) Calcolare l'area del triangolo PRH.

a) $A = (0, 2, -1)$, $B = (4, 0, 1)$

r PASSANTE PER AB

↳ VETT. DIR. $\vec{v} = A - B = (-4, 2, -2) \underset{/-2}{\sim} (2, -1, 1)$

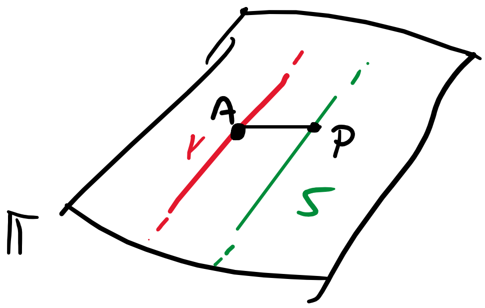
$$\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) $s : \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$ VERIFICA $s \parallel r$

TROVO LA FORMA PARAM. DI s PER TROVARE IL VETTORE DIREZIONE $\vec{w}$

$$s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = (+2, -1, 1)$$

$\vec{w} \parallel \vec{v} \Rightarrow s \parallel r$



c) π CONTENENTE r e s

PRENDO UN PUNTO $P \in s$ MA NON A r

PER ES $P=(3,3,0)$.

CALCOLO IL VETTORE DIR. DELLA RETTA PASSANTE PER P e A (SARÀ // A r e s)

$$(3,3,0)-(0,2,-1) = (3,1,1) = \vec{u}$$

IL VETTORE DIRETTORE DEL PIANO π SARÀ

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3,1,1) \times (2,-1,1) = (2,-1,-5)$$

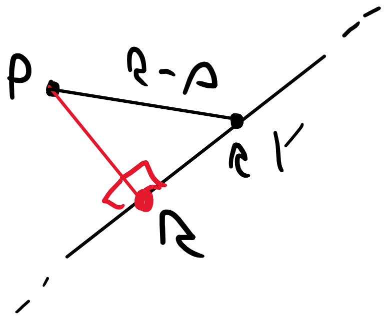
$$\Rightarrow \pi : 2(x-0) - (y-2) - 5(z+1) = 0$$

$$2x - y + 2 - 5z - 5 = 0$$

$$2x - y - 5z - 3 = 0$$

d) $P=(-1,0,5)$

$\vec{v}=(2,-1,1)$



$$r = \begin{cases} x = 2t \\ y = 2-t \\ z = -1+t \end{cases} \qquad R=(2t, 2-t, -1+t)$$

$$R-P \perp \vec{v} \Rightarrow R-P = (2t+1, 2-t, t-5)$$

$$R - P \perp \vec{v} \Rightarrow R - P = (2t+1,\ 2-t,\ t-6)$$

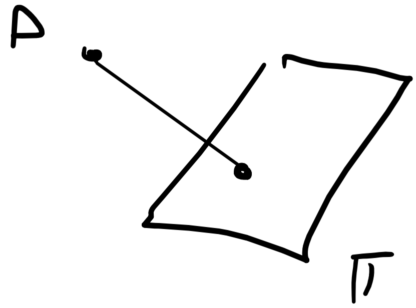
$$(R-P)\cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2t+1)\cdot 2 + (2-t)(-1) + (t-6)\cdot 1 = 0$$

$$4t \cancel{+2} \cancel{-2} + t + t - 6 = 0$$

$$6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

$$R = (2, 1, 0)$$

e) $P = (-1, 0, 5)$



$\pi = 2x - y - 5z - 3 = 0$ $\quad H \in \pi$

$P \in d$, $d \perp \pi \Rightarrow$ VETT. DIR. $d = (2, -1, -5)$

$$d = \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \qquad d \cap \pi$$

$$2(-1+2t) - (-t) - 5(5-5t) - 3 = 0$$

$$-2 + 4t + t - 25 + 25t - 3 = 0$$

$$30t = 30 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow H = (1, -1, 0)$$

f) $PH \perp RH \Rightarrow A = \frac{PH \cdot RH}{2}$

$PH = (-1,0,5) - (1,-1,0) = (-2,1,5)$

$|PH| = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30} =$

$RH = (2,1,0) - (1,-1,0) = (1,2,0)$

$|RH| = \sqrt{5}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{150}$

$(-1)^n \cdot a_n$

CRITERIO DI LEIBNIZ

VS

CONV. ASSOLUTA $\left(\sum |a_n|\right)$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2-n+3} \sim \sum \frac{1}{|n^2-n+3|}$$

$$\frac{1}{|n^2|}$$