MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

Modello 2º Compitino — 11 gennaio 2025

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali

1. l'integrale definito $\int_1^e \frac{\sqrt{5+\ln(x)}}{x}\,dx$
2. l'integrale generalizzato $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

1) $\int_1^e \frac{\sqrt{5+\ln x}}{x}$ $\qquad \sqrt{5+\ln x} = t$

$dx \, \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5+\ln x}} = dt$

$dx = 2xt\,dt$

$\Rightarrow \int_1^e \frac{t}{\cancel{x}} \cdot 2\cancel{x}t\,dt = 2\int_1^e t^2 = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^e$

$= 2\left[\frac{\sqrt{5+\ln x}^3}{3}\right]_1^e = 2\left[\frac{\sqrt{6}^3}{3} - \frac{\sqrt{5}^3}{3}\right]$

$= \frac{2}{3}\left(6\sqrt{6} - 5\sqrt{5}\right)$

$$2) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{a \to 3^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$= \lim_{a \to 3^-} \int_0^a \left(\sqrt{3-x}\right)^{-1} dx = \lim_{a \to 3^-} \int_0^a (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{a \to 3^-} -\int_0^a -(3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a \to 3^-} \left[-2\cdot(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^a$$

$$= \lim_{a \to 3} \left[-2\sqrt{3-a} - \left(-2\sqrt{3}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione differenziale.

$$y' - 2xy = -2x^3$$

1. Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione.
2. Si determini la soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione $y(0) = 3$

$$y' \underbrace{-2x}_{a(x)} y = -2x^3 \qquad \text{EQ. LIN. } 1^0 \text{ GRADO NON OMOG.}$$

$\int a(x)$

FORMULA

$$y = \underbrace{k e^{-A(x)}}_{\text{SOL. OMOG. ASSOCIATA}} + \underbrace{\Big(\underbrace{\int f(x) e^{A(x)} dx}_{\text{"k(x)"}}\Big) e^{-A(x)}}_{\text{SOL. PARTICOLARE}} , \quad A(x) = \int a(x)\, dx$$

$$A(x) = \int -2x \, dx = -2 \frac{x^2}{2} = -x^2$$

$$\int f(x) e^{A(x)} = \int -2x^3 \cdot e^{-x^2} . \qquad t = -x^2$$

$$dt = -2x\, dx \Rightarrow \frac{dt}{-2x} = dx$$

$$\Rightarrow \int t\, 2x \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-\cancel{2x}} = \int -t e^t \, dt =$$

$$= [\text{PARTI}] \quad -te^t - \int -e^t \, dt = -te^t + e^t$$

$$= x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

SOLUZIONE: $y = k e^{x^2} + (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}) e^{x^2}$

$$\boxed{y = k e^{x^2} + x^2 + 1}$$

PONGO $y(0) = 3 \Rightarrow k + 0 + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$

$$\Rightarrow y = 2e^{x^2} + x^2 + 1$$

Esercizio 3. Si consideri la seguente equazione differenziale.

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}$$

1. Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione.
2. Si determini la soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(0) = \frac{18}{7}$ e $y'(0) = -\frac{1}{7}$.

$P(x)_r e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda = 5, \; q_r(x) = 3$

$r = 0$

$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}$ EQ DI 2° GRADO NON OMOG.

1° PASSO: TROVARE LE SOL. DELL'OMOG. ASS.

$y'' - 4y' - 12y = 0$

$\rightsquigarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 6 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow y = k_1 e^{6x} + k_2 e^{-2x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

2) TROVO UNA SOL. PARTICOLARE

$y = x^k q_r e^{\lambda x}$

q_r → GENERICO POL. DI GRADO r

$r=1: \; ax+b$

$r=2: \; ax^2+bx+c$

$k = \{$ 0 SE λ NON È RADICE DEL POL. CAR.

$r=0: \; k$

$$K=\begin{cases} 0 \text{ SE } \lambda \text{ NON È RADICE DEL POL. CAR.} & r=0: K \\ 1 \text{ SE } \lambda \text{ È } \text{'' '' '' ''} \\ 2 \text{ SE } \lambda \text{ È '' DOPPIA '' '' ''} \end{cases}$$

$\lambda = 5 \Rightarrow$ NON È RADICE DI $\lambda^2-4\lambda-12$

$\Rightarrow k_1=0 \Rightarrow$ SOL. PART: $y = \underbrace{k}_{\text{POL. DI GRADO 0 (UN NUMERO)}} e^{5x}$

TROVO k_1:

SO $y''-4y'-12y=3e^{5x}$

$y' = 5ke^{5x}$

$y'' = 25ke^{5x}$

$\Rightarrow 25ke^{5x}-20ke^{5x}-12ke^{5x}=3e^{5x}$

$-7ke^{5x}=3e^{5x}$

$\Rightarrow k=-\frac{3}{7}$

SOL PART: $y=-\frac{3}{7}e^{5x}$

3) SOMMO LA SOL. PARTIC. E L'OMOG.

$y=-\frac{3}{7}e^{5x}+k_1e^{6x}+k_2e^{-2x}$

$y(0)=\frac{18}{7}$, $y'(0)=-\frac{1}{7}$

$y(0) = -\frac{3}{7}+k_1+k_2=\frac{18}{7}$

$$y(0) = -\frac{3}{7} + k_1 + k_2 = \frac{18}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1 + k_2 = 3$$

$$y' = -\frac{15}{7} e^{5x} + 5k_1 e^{5x} - 2k_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = -\frac{15}{7} + 5k_1 - 2k_2 = -\frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5k_1 - 2k_2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ 5k_1 - 2k_2 = 2 \end{cases}$$

$$8k_1 \quad = 8$$

$$\Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{7} e^{5x} + e^{5x} + 2e^{-2x}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione in due variabili

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

1. Si trovino il vettore gradiente e la matrice Hessiana di f.
2. Si determinino tutti punti critici, e si indichi se sono massimi locali, minimi locali o punti di sella.

$f(x,y) = 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

GRADIENTE: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 6x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 6y$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 3y^2 - 6y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial xx} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial yy} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial xx} = 6y - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 6x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial yy} = 6y - 6$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

PUNTI CRITICI: $\begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x(y-1)=0 \\ 3x^2+3y^2-6y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=1 \\ 3x^2+3y^2-6y=0 \end{cases}$$ STUDIO I 2 CASI

1) $\begin{cases} x=0 \\ 3y^2-6y=0 \Leftrightarrow 3y(y-2)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=2 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0),(0,2)$ PUNTI CRITICI

2) $\begin{cases} y=1 \\ 3x^2+3-6=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ 3x^2=3 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ PUNTI CRITICI: $(0,0),(0,2),(1,1)(-1,1)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

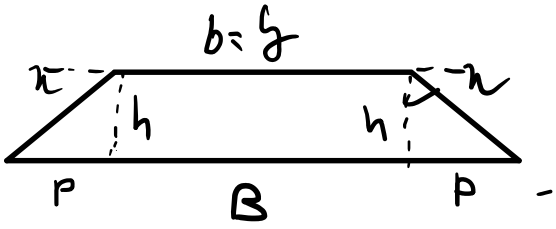
$$\Rightarrow Hf(0,0)=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = 36 > 0$$

INOLTRE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-6<0 \Rightarrow (0,0)$ È MAX

INOLTRE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 < 0 \Rightarrow (0,0)$ È MAX

$$Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det } H = 36 > 0$$

INOLTRE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6 > 0 \Rightarrow (0,2)$ È MINIMO



$$2x + y = 100$$

$$h = x \cdot \cos\theta$$

$$p = x \cdot \sin\theta \qquad B = y + 2x\sin\theta$$

$$b = y = 100 - 2x \qquad = 100 - 2x + 2x\sin\theta$$

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = (100x - 2x^2 + x^2\sin\theta)\cos\theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = (100 - 4x + 2x\sin\theta)\cos\theta = 0$$

$\cos\theta \neq 0$ [GEOM. IMPOSSIBILE]

$$\Rightarrow 100 - 4x + 2x\sin\theta = 0 \quad (1.)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = (100x - 2x^2 + x^2\sin\theta)(-\sin\theta) + (x^2\cos\theta)\cos\theta = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ DA 1. TROVO $x = \frac{50}{2-\sin\theta}$

E SOSTITUENDO IN 2. TROVO

$$(4 - 2\sin\theta - 2 + \sin\theta)(-\sin\theta) + (1 - \sin^2\theta) = 0$$

$$\ldots \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{50}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{50}{\frac{3}{2}} = \frac{100}{3} \quad (33{,}\overline{3})$$

$$y = 100 - 2x = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3} \quad (33{,}\overline{3})$$

AREA MAX $= \frac{2500\sqrt{3}}{3}$

$\hookrightarrow \frac{(B+b)\cdot h}{2}$