TUTORATO STRAORDINARIO: VENERDÌ 14/10, 15:30 - 18:30 ?

⚠ INOLTRE LUNEDÌ 17 NON C'È TUTORATO

SCHEMA GENERALE STUDIO DI FUNZIONE

- DOMINIO: GUARDO DOVE LA FUNZIONE NON È DEFINITA
  IN PARTICOLARE: $\frac{\dots}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0$ (DENOMIN. NON NULLO)
  $\sqrt[2]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$; $\ln(f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$

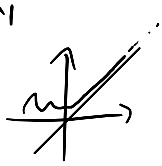
- INTERSEZIONE CON GLI ASSI:
  ASSE y: PONGO LA $x = 0$
  ASSE x: PONGO LA FUNZIONE $= 0$

  $x^2 \Rightarrow (-x)^2 = x^2$

- SIMMETRIE: PARI: $f(-x) = f(x)$ SIMMETRIA ASSE y
  DISPARI: $f(-x) = -f(x)$ SIMMETRIA ORIGINE

- SEGNO: VALUTO QUANDO LA FUNZIONE È ≥ 0 ($0 \leq 0$)

- LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO E ASINTOTI
  ASINTOTO ORIZZONTALE: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
  ASINTOTO VERTICALE: $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$



  ASINTOTO OBLIQUO: SE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ CONTROLLO

  CONTROLLO $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $(< \infty)$ $y = mx + q$

  IN TAL CASO: CALCOLO PURE $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$

  E L'ASINTOTO OBLIQUO È LA RETTA: $y = mx + q$

- FACCIO IL GRAFICO

CONSEGNA: SVOLGI LO STUDIO DI FUNZIONE

$$(4)\ \ f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right);$$

$$(7)\ \ f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}};$$

↳ PUÒ SERVIRE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ex = 2e$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right)$

- DOMINIO: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{x^2+2}{(x-2)^2} > 0 \iff x^2+2 > 0 \quad \left(\text{POSSO PERCHÉ } (x-2)^2 > 0 \text{ !!!}\right)$$

$$\iff x^2 > -2 \Rightarrow \forall x$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- INTERSEZIONE ASSI: y: $\ln\left(\frac{0+2}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

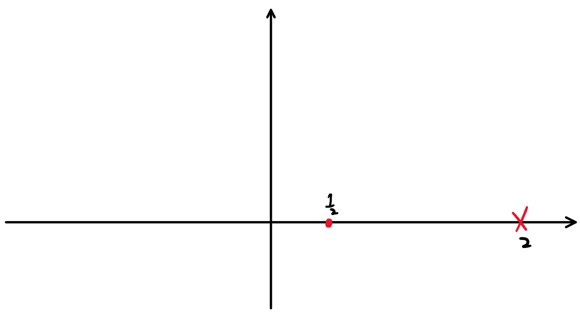
x: $\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) = 0$

$$e^{\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right)} = e^0 \iff \frac{x^2+2}{(x-2)^2} = 1$$

$$\iff x^2+2 = (x-2)^2 \iff \cancel{x^2}+2 = \cancel{x^2}-4x+4$$

$$-2 = -4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

GRAFICO PROVVISORIO:



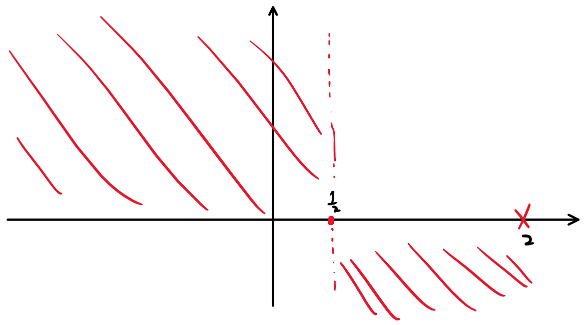
- SIMMETRIE: $f(-x) = \ln\left(\frac{(-x)^2+2}{(-x-2)^2}\right) = \ln\left(\frac{x^2+2}{(x+2)}\right) \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

NÉ PARI NÉ DISPARI

- SEGNO: $\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) \geq 0$ SOLO PERCHÉ $(x-2)^2 > 0$!

$$\iff \frac{x^2+2}{(x-2)^2} \geq 1 \iff x^2+2 \geq (x-2)^2$$

$$\iff \cancel{x^2}+2 \geq \cancel{x^2}-4x+4 \iff 4x \geq 2 \iff x \geq \frac{1}{2}$$



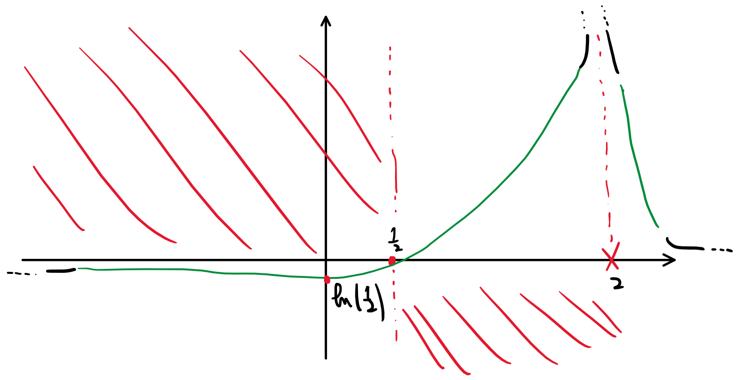
· LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right)$$

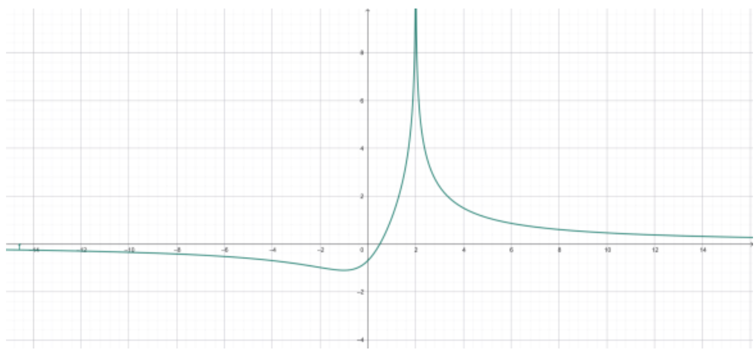
$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\overbrace{\frac{x^2+2}{x^2-4x+4}}^{\approx \frac{x^2}{x^2}=1}\right) = 0^+ \to \text{A.O.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-4x+4}\right) = 0^+$$ PER LO STESSO MOTIVO.

$$\lim_{x\to2^-} \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) = +\infty = \lim_{x\to2^+} \ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) \to \text{A.V.}$$



SITO UTILE PER VISUALIZZARE GRAFICI: GEOGEBRA.



7) $(x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$

· DOMINIO: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

· INTERSEZIONI ASSI: y: $1 \cdot e^0 = 1$

· DOMINIO: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

· INTERSEZIONI ASSI: y: $1 \cdot e^0 = 1$

UNA COSA UTILE PER RISPARMIARE TEMPO PUÒ ESSERE STUDIARE L'INTERSEZIONE CON L'ASSE x $(f(x)=0)$ DIRETTAMENTE QUANDO STUDIO IL SEGNO $(f(x) \geq 0)$

· SIMMETRIE: $f(-x) = (-x+1)\, e^{\frac{-x}{-x-1}} \neq f(x), \neq -f(x)$

NÉ PARI NÉ DISPARI

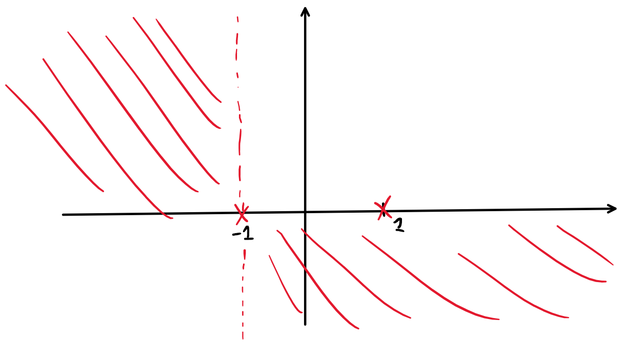
· SEGNO: $(x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} \geq 0$

· $(x+1) \geq 0 \iff x \geq -1$

$e^{\frac{x}{x-1}} \geq 0 \iff \forall x \neq 1$ (L'ESPONENZIALE È SEMPRE >0)

		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$
$e^{\frac{x}{x-1}}$	$+$		$+$
	$-$		$+$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ SE $x \geq -1$ ($=0$ SE $x=-1$)



LIMITI E ASINTOTI

$\lim_{x \to +\infty} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1} \to 1} = [+\infty \cdot e] = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} = [-\infty \cdot e] = -\infty$

No A.O.

CONTROLLO ASINTOTI OBLIQUI

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}}}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} \cdot e^{\boxed{\frac{x}{x-1}} \to 1} = e$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ex = (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} - xe = 2e$

$\sim x\left(e^{\frac{x}{x-1}} - e\right)$

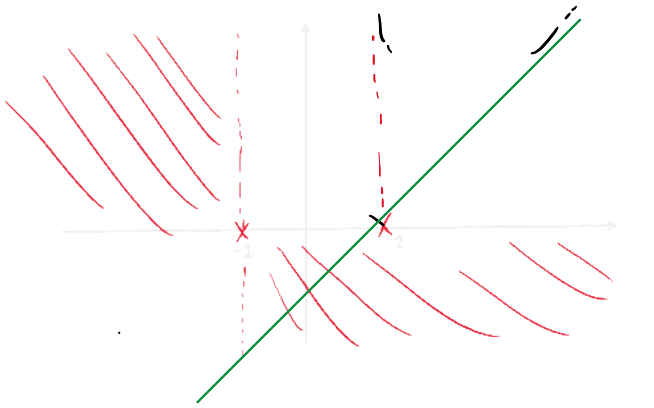
RETTA: $y = ex + 2e$

RETTA: $y = ex + 2e$

IDEM PER $-\infty$, STESSO ASINTOTO

$$\lim_{x\to 1^-} (x+1)e^{\frac{x}{x-1}} = \left[2\cdot e^{\overbrace{\frac{1}{0^-}}^{\to -\infty}}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} = \left[2\cdot e^{\frac{1}{0^+}}\right] = +\infty \quad A.V.$$



(16) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right);$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right);$

• DOMINIO: $x \neq 1$, $\quad \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ SEMPRE PERCHÉ $(x-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• INTERSEZIONI ASSI:

y: $\frac{1}{2}\cdot 0 + \ln\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \ln(1) = 0 \quad (0,0)$

x: DOPO CON SEGNO

• SIMMETRIE: $f(-x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left(\frac{1}{(-x-1)^2}\right)$

$= \frac{1}{2}x^2 + \ln\left(\frac{1}{(+x+1)}\right)$

NÉ PARI NÉ DISPARI

SEGNO: $\frac{1}{2}x^2 + \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \geq 0$

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln\left((x-1)^{-2}\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x-1| \geq 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 \geqslant 2\ln|x-1|$$

$$\vdots$$

NON SI PUÒ TROVARE IN MANIERA ELEMENTARE

(ERRORE NEL TESTO?)

IN OGNI CASO PROSEGUIAMO CON IL CALCOLO DEGLI ASINTOTI...

ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty} \overset{\nearrow +\infty}{\frac{1}{2}x^2} + \ln\overset{\nearrow -\infty}{\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 + \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = +\infty$$ STESSO MOTIVO

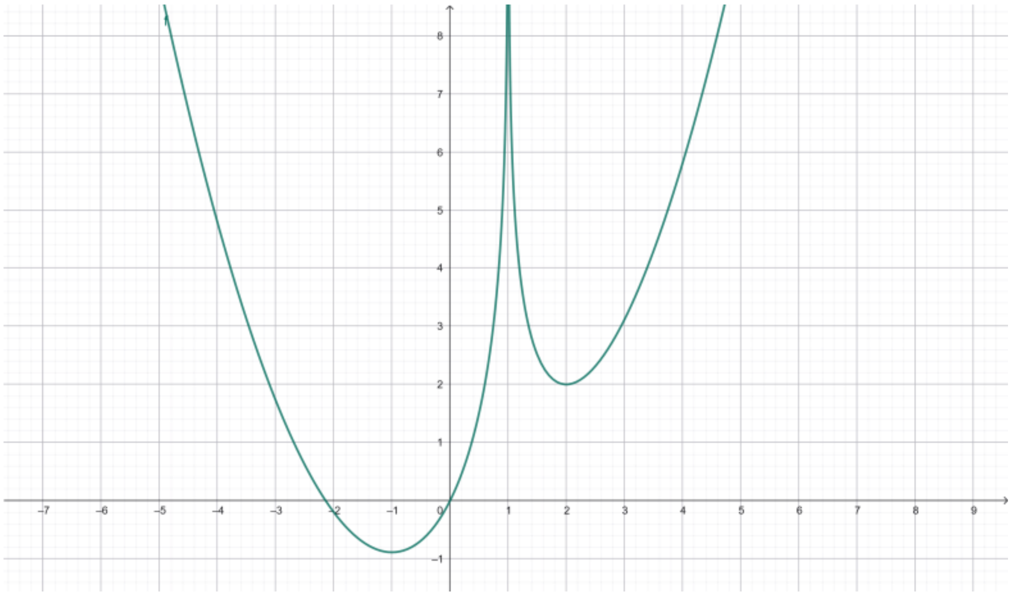
ASINTOTO OBLIQUO? $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{2}x^2+\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x} = +\infty$

NO!

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}x}}_{\to+\infty} + \cancel{\frac{\ln\dots}{x}}$$

$$\lim_{x\to1^-} \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\downarrow\ 1} + \overbrace{\ln\left(\frac{1}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}}\right)}^{-\infty} = -\infty = \lim_{x\to1^+} f(x)$$

ASINTOTO VERTICALE IN $x = 1$



$$\ln\left(\frac{2x^3-2x^2}{2x-3}\right)$$

DOMINIO: $2x-3 \neq 0 \Rightarrow \quad x \neq \frac{3}{2}$

$$\frac{2x^3-2x^2}{2x-3} > 0$$

$2x-3 > 0 \Rightarrow \quad 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$2x^3-2x^2>0 \Rightarrow 2x^2(x-1)>0 \quad (x\neq 0)$

$\Rightarrow x>1$

		1		$\frac{3}{2}$	
N	$-$		$-$		$+$
D	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$x<1 \ \vee \ x>\frac{3}{2}, \ x\neq 0$

$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

SEGNO: $\ln\left(\frac{2x^3-2x^2}{2x-3}\right)\geq 0$

$$\frac{2x^3-2x^2}{2x-3}\geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3-2x^2-2x+3}{2x-3}\geq 0$$

ANCHE QUI NON POSSIAMO RISOLVERE CON METODI ELEMENTARI...

ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\overbrace{2x^3-2x^2}^{+\infty}}{2x-3}\right) = +\infty = \lim_{x\to-\infty}$$

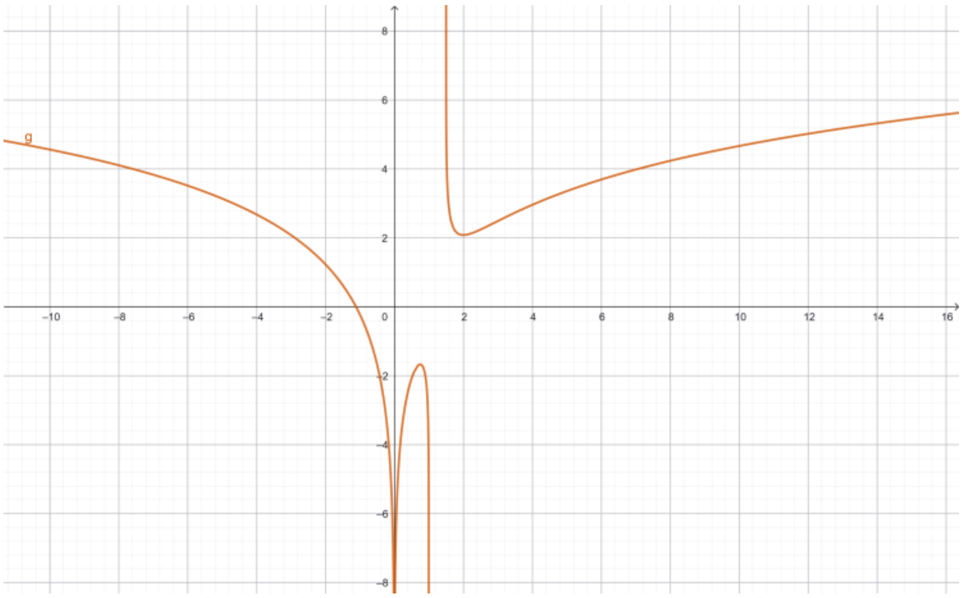
$$\lim_{x\to 0^-}\ln\left|\frac{\overbrace{2x^3-2x^2}^{0}}{\underbrace{2x-3}_{-3}}\right| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left|\frac{2x^3-2x^2}{2x-3}\right| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\ln\left(\frac{\overbrace{2x^3-2x^2}^{0}}{\underbrace{2x-3}_{-1}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^+}\ln\left(\frac{\overbrace{2x^3-2x^2}^{>0}}{\underbrace{2x-3}_{0}}\right) = \boxed{+\infty}$$

$+\infty$


g