Correzione 2° appello 11/7/2023 Tema A

Teoria

1.a. Si dia la definizione di somma di due sottospazi vettoriali e di somma diretta

Dati U e W sottospazi di un K-spazio vettoriale V con K un campo si definisce somma di U e W

$$U+W := \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

Si dimostra che esso è un sottospazio di V ed è il più piccolo sottospazio contenente sia U che W.
La somma si dice diretta quando $U \cap W = \{0_V\}$ e in tal caso lo spazio somma si indica con $U \oplus W$.

1.b Si dia la definizione di ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dato $S \leq \mathbb{R}^n$ si definisce ortogonale di S il sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$$S^{\perp} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot s = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

1.c. Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare.

Data $f: V \to W$ applicazione lineare con V e W K-spazi vettoriali si definisce nucleo di f

$$\operatorname{Ker} f := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} = f^{-1}(\{0_W\})$$

che è un sottospazio di V.

2. Dimostrare che se $f: V \to W$ è lineare e $V_1 \leq V$ allora $f(V_1) \leq W$.

Dimostriamo che $f(V_1)$ è chiuso per la somma e per il prodotto per scalari:

Siano $f(v), f(v') \in f(V_1)$ avendo $v, v' \in V_1$ allora

$f(v) + f(v') = f(v+v') \in f(V_1)$ perché $v+v' \in V_1$ essendo $V_1 \leq V$.

per la linearità di f

Sia $f(v) \in f(V_1)$ avendo $v \in V_1$ e $\alpha \in K$ allora

$\alpha f(v) = f(\alpha v) \in f(V_1)$ perché $\alpha v \in V_1$ essendo $V_1 \leq V$.

per la linearità di f.

3. Enunciare il Teorema delle dimensioni.

Sia $f: V \to W$ applicazione lineare con V e W K-spazi vettoriali e dimensione di V finita $\dim V = n$, allora

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

ove $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} \leq V$

$\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \} \leq W$.

Esercizi:

Esercizio 1: Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione $x^4 - \frac{5+i}{3-2i} = 0$ e scriverle in forma trigonometrica.

$$x^4 = \frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{13+13i}{13} = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Applicando le formule di De Moivre otteniamo

$$x_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}{4}\right) \quad \text{per } k=0,1,2,3.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16}\right) & x_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9}{16}\pi\right) \\ x_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17}{16}\pi\right) & x_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{25}{16}\pi\right) \end{array}}$$

Esercizio 2: si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

a) Determinare: una base B_U di U, $\dim U$, una base B_W di W, $\dim W$, una base $B_{U\cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U\cap W)$, una base B_{U+W} e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_3, x_4 \text{ in } \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{quindi } \dim U = 3.}$$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ i generatori sono linearmente indipendenti perché non multipli

$$\boxed{B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \dim W = 2.}$$

Per calcolare $U \cap W$ consideriamo il generico vettore $w \in W$
$w = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e vediamo per quali valori dei parametri a e b $w \in U$ cioè verifica l'equazione cartesiana di U: $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$

$a - 2(-a) + (a+b) - a = 0 \qquad a + 2a + a + b - a = 0 \qquad 3a + b = 0$

$b = -3a$ quindi $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a-3a \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$ e $\dim(U \cap W) = 1$ quindi U e W non sono in somma diretta perché $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

Dalla formula di Grassmann ricaviamo
$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$
essendo $U+W \leq \mathbb{R}^4$ e $\dim(U+W) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$
$\Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$ quindi come base di $U+W$ possiamo prendere la base canonica

$$\boxed{B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \dim(U+W) = 4.}$$

2b. Determinare equazioni cartesiane per W e completare B_U a una base di $\mathbb{R}^4$.

Essendo $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W \iff$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases}$$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Usiamo 2 equazioni per determinare i parametri $\begin{cases} a = x_1 \\ b = x_3 \end{cases}$ e sostituiamo nelle due equazioni rimanenti

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases} \quad \text{equazioni cartesiane di } W.}$$

Avendo $\dim U = 3$ e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ per completare B_U a base di $\mathbb{R}^4$ è necessario aggiungere un vettore $\bar{v} \in \mathbb{R}^4 \setminus U$ per il lemma di completamento ad una base. Dato che U ha equazione cartesiana: $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e il vettore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non la soddisfa $e_1 \notin U$ quindi

$$\boxed{\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \mathbb{R}^4 \text{ contenente } B_U.}$$

2c. Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$.

Essendo $U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\dim(U \cap W) = 1$ e dovendo essere

$T \oplus (U \cap W) = W \Rightarrow \dim T = \dim W - \dim(U \cap W) = 2 - 1 = 1$

quindi $T = \langle t \rangle$ con $\left\{ t, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di W.

Ad esempio $t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ ed è linearmente indipendente con $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $\boxed{B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$ va bene.

Potevamo anche scegliere $B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in W \setminus (U \cap W)$.

Analogamente dovendo essere $S \oplus (U \cap W) = U \Rightarrow$
$\dim S = \dim U - \dim (U \cap W) = 3 - 1 = 2$ quindi
$B_S = \{ s_1, s_2 \}$ con $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \right\}$ base di U.

Ad esempio $\boxed{B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$ verifica la richiesta.

Esercizio 3: si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ di $\mathbb{R}^3$ sia

$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di f_a? Per quale autovalore?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di $f_a \iff$ esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f_a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con α il relativo autovalore.

Essendo $f_a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+a \\ 1+a \end{pmatrix}$ si ha

$$f_a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0\\1+a\\1+a\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{cases}\alpha = 0\\ a = -1\end{cases}}$$

Quindi $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di f_a solo per $a=-1$ relativo all'autovalore 0.

Es 3 ii) Calcolo $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo che $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| f_a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} =$
$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| M_a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ovvero dobbiamo risolvere il sistema lineare di matrice completa $\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & a & 0 & 1\\ 1 & 0 & a & 1\end{array}\right)$ Notiamo che $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ è la prima colonna di M_a

quindi $f_a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Riduciamo con Gauss per risolvere il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & 0 & 1\\ 0 & 1+2a & 1 & 0\\ 0 & -a & a & 0\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1+2a & 0\\ 0 & -a & a & 0\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1+2a & 0\\ 0 & 0 & -2a-2a^2 & 0\end{array}\right)$$

Se $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$ $rg A = rg(A|b) = 3$ il sistema ha un'unica soluzione $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Se $a=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\begin{cases}x_2 = -x_3\\ x_1 = 1\end{cases}$

$$\boxed{f_0^{-1}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}$$

Se $a=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases}$

$$\boxed{f_{-1}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}.$$

Es 3 iii). Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a=-1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

Essendo $M_a = M_a^t$ $\forall a \in \mathbb{R}$ cioè simmetrica, per il teorema spettrale reale M_a è ortogonalmente diagonalizzabile $\forall a \in \mathbb{R}$ quindi $\boxed{M_a \text{ è diagonalizzabile } \forall a \in \mathbb{R}}$.

Poniamo $a=-1$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$ e calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 0 \\ 1 & 0 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$$= 1+x-(1+x)(x^2+3x+1) =$$

$$= (1+x)(1-x^2-3x-1) = -(1+x)\,x(x+3)$$

Gli autovalori sono $-1, 0, -3$.

L'autospazio $V_0 = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ prendiamone una base ortonormale $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = u_1$

$V_{-1} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$V_{-3} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_2 - x_3 = -2x_3 \end{cases}$

$V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $u_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Abbiamo normalizzato i vettori perché è richiesta una matrice ortogonale H quindi le colonne di H devono essere una base ortonormale di autovettori (tale base esiste perché la matrice è simmetrica).

$$\boxed{H=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 4: Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano si considerino i piani π_1 e π_2:

$\pi_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\pi_2: x-2y+z=-1$

1.) Determinare equazioni cartesiane per π_1 e scrivere π_2 come sottovarietà lineare $P+V_{\pi_2}$.

$\pi_1: \begin{cases} x=1+b \\ y=a \\ z=-2+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b=x-1 \\ a=y \end{cases}$ $\quad z=-2+x-1$

$\boxed{-x+z=-3}$ eq. cartesiana di π_1.

$\pi_2 \quad \begin{pmatrix} 2y-z-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\boxed{\pi_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Es4 2) Determinare posizione reciproca, distanza ed eventuale intersezione tra π_1 e π_2.

$\pi_1 \cap \pi_2 \begin{cases} x-z=3 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$ è la retta $\boxed{s: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

quindi $\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = 0}$ perché $\boxed{\text{i piani sono incidenti in s.}}$

Es 4 3) Calcolare la distanza tra il piano π: $x-2y+z=5$ e π_2: $x-2y+z=-1$.

I piani π e π_2 sono paralleli quindi $d(\pi, \pi_2) = d(\pi, P)$ con $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi_2$ usando la formule delle distanza punto piano otteniamo

$$\boxed{d(\pi, \pi_2) = \frac{|-1-2\cdot 0+0-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}}$$

Es 4.4) Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela a π_1 e a π_2 e passante per $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La retta richiesta deve essere contenuta nel piano $\sigma_1 // \pi_1$ e passante per Q e nel piano $\sigma_2 // \pi_2$ passante per Q

quindi $\boxed{r: \begin{cases} x-z=1 \\ x-2y+z=1 \end{cases}}$ $\qquad r: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$