

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2

DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

I appello – 26/06/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) definizione di vettori linearmente indipendenti;
- b) definizione di matrice ortogonale;
- c) definizione di distanza tra sottovarietà lineari in $A^3(\mathbb{R})$.

2. Dimostrare che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

3. Enunciare il Teorema spettrale reale.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$(x^3 + 1) \left(x^3 + \frac{6 + 4i}{1 + 5i} \right) = 0$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per $U + W$ ed completare la base $\mathcal{B}_{U+W}$ a base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base di $\text{Ker}(f_a)$ e $\text{Im}(f_a)$.
- ii) Calcolare $f_a^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = -1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri le rette t e r :

$$t : (1, 0, -2) + \langle (0, 1, 0) \rangle \quad r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

1. Determinare equazioni cartesiane della retta t , equazioni parametriche della retta r
 2. Calcolare la distanza della retta r dalla retta t .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - y - z = 5$ e il punto $Q = (1, 0, 0)$.
 4. Determinare l'equazione cartesiana di un piano $\pi' \neq \pi$ parallelo a π tale che $d(\pi, Q) = d(\pi', Q)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2

DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

I appello – 26/06/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) definizione di vettori linearmente indipendenti;
- b) definizione di distanza tra sottovarietà lineari in $A^3(\mathbb{R})$;
- c) definizione di matrice ortogonale.

2. Dimostrare che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

3. Enunciare il Teorema spettrale reale.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$(x^3 - 1) \left(x^3 + \frac{6 + 4i}{1 + 5i} \right) = 0$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per $U + W$ ed completare la base $\mathcal{B}_{U+W}$ a base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base di $\text{Ker}(f_a)$ e $\text{Im}(f_a)$.
- ii) Calcolare $f_a^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = 1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_1H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri le rette r e t :

$$r : \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases} \quad t : (-2, 0, 1) + \langle (0, 1, 0) \rangle$$

1. Determinare equazioni cartesiane della retta t , equazioni parametriche della retta r
 2. Calcolare la distanza della retta r dalla retta t .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x + y - z = -5$ e il punto $Q = (0, 0, 1)$.
 4. Determinare l'equazione cartesiana di un piano $\pi' \neq \pi$ parallelo a π tale che $d(\pi, Q) = d(\pi', Q)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

I appello – 26/06/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) definizione di distanza tra sottovarietà lineari in $A^3(\mathbb{R})$;
- b) definizione di vettori linearmente indipendenti;
- c) definizione di matrice ortogonale.

2. Dimostrare che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

3. Enunciare il Teorema spettrale reale.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$\left(x^3 + \frac{6+4i}{1+5i}\right)(x^3 + 1) = 0$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per $U+W$ ed completare la base $\mathcal{B}_{U+W}$ a base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base di $\text{Ker}(f_a)$ e $\text{Im}(f_a)$.
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = -1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri le rette r e t :

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad t : (1, 0, -2) + \langle (0, 1, 0) \rangle$$

1. Determinare equazioni cartesiane della retta t , equazioni parametriche della retta r
 2. Calcolare la distanza della retta r dalla retta t .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - y - z = 5$ e il punto $Q = (1, 0, 0)$.
 4. Determinare l'equazione cartesiana di un piano $\pi' \neq \pi$ parallelo a π tale che $d(\pi, Q) = d(\pi', Q)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2

DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

I appello – 26/06/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) definizione di matrice ortogonale;
- b) definizione di distanza tra sottovarietà lineari in $A^3(\mathbb{R})$;
- c) definizione di vettori linearmente indipendenti.

2. Dimostrare che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

3. Enunciare il Teorema spettrale reale.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$\left(x^3 + \frac{6+4i}{1+5i}\right)(x^3 - 1) = 0$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per $U+W$ ed completare la base $\mathcal{B}_{U+W}$ a base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base di $\text{Ker}(f_a)$ e $\text{Im}(f_a)$.
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = 1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_1H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri le rette t e r :

$$t : (-2, 0, 1) + \langle (0, 1, 0) \rangle \quad r : \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

1. Determinare equazioni cartesiane della retta t , equazioni parametriche della retta r
 2. Calcolare la distanza della retta r dalla retta t .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x + y - z = -5$ e il punto $Q = (0, 0, 1)$.
 4. Determinare l'equazione cartesiana di un piano $\pi' \neq \pi$ parallelo a π tale che $d(\pi, Q) = d(\pi', Q)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!