

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

II appello – 11/07/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
 - a) Si dia la definizione di somma di due sottospazi vettoriali e di somma diretta.
 - b) Si dia la definizione di ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
 - c) Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare.
2. Dimostrare che: se $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare e $V_1 \leq V$ allora $f(V_1) \leq W$.
3. Enunciare il Teorema delle dimensioni.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{5+i}{3-2i} = 0$$

e scriverle in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di f_a ? Per quale autovalore?
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = -1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri i piani π_1 e π_2 :

$$\pi_1 = (1, 0, -2) + \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle \quad \pi_2 : x - 2y + z = -1$$

1. Determinare equazioni cartesiane per π_1 e scrivere π_2 come sottovarietà lineare $P + V_{\pi_2}$.
 2. Determinare posizione reciproca, distanza ed eventuale intersezione tra π_1 e π_2 .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 2y + z = 5$ e π_2 .
 4. Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela a π_1 e a π_2 e passante per $Q = (1, 0, 0)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

II appello – 11/07/2023

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) Si dia la definizione di somma di due sottospazi vettoriali e di somma diretta.
- b) Si dia la definizione di ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
- c) Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare.

2. Dimostrare che: se $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare e $V_1 \leq V$ allora $f(V_1) \leq W$.

3. Enunciare il Teorema delle dimensioni.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{5-i}{3+2i} = 0$$

e scriverle in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di f_a ? Per quale autovalore?
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = 1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri i piani π_1 e π_2 :

$$\pi_1 = (0, 1, -2) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \quad \pi_2 : -2x + y + z = -1$$

1. Determinare equazioni cartesiane per π_1 e scrivere π_2 come sottovarietà lineare $P + V_{\pi_2}$.
 2. Determinare posizione reciproca, distanza ed eventuale intersezione tra π_1 e π_2 .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : -2x + y + z = 5$ e π_2 .
 4. Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela a π_1 e a π_2 e passante per $Q = (0, 1, 0)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

II appello – 11/07/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
 - a) Si dia la definizione di somma di due sottospazi vettoriali e di somma diretta.
 - b) Si dia la definizione di ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
 - c) Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare.
2. Dimostrare che: se $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare e $V_1 \leq V$ allora $f(V_1) \leq W$.
3. Enunciare il Teorema delle dimensioni.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{5+i}{3-2i} = 0$$

e scriverle in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di f_a ? Per quale autovalore?
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = -1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri i piani π_1 e π_2 :

$$\pi_1 = (1, 1, -2) + \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle \quad \pi_2 : x - 2y + z = -1$$

1. Determinare equazioni cartesiane per π_1 e scrivere π_2 come sottovarietà lineare $P + V_{\pi_2}$.
 2. Determinare posizione reciproca, distanza ed eventuale intersezione tra π_1 e π_2 .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 2y + z = 5$ e π_2 .
 4. Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela a π_1 e a π_2 e passante per $Q = (1, 0, 0)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

II appello – 11/07/2023

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) Si dia la definizione di somma di due sottospazi vettoriali e di somma diretta.
- b) Si dia la definizione di ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
- c) Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare.

2. Dimostrare che: se $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare e $V_1 \leq V$ allora $f(V_1) \leq W$.

3. Enunciare il Teorema delle dimensioni.

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{5-i}{3+2i} = 0$$

e scriverle in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$.

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di f_a ? Per quale autovalore?
- ii) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile? Posto $a = 1$ determinare una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}M_{-1}H = D$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si consideri i piani π_1 e π_2 :

$$\pi_1 = (1, 1, -2) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \quad \pi_2 : -2x + y + z = -1$$

1. Determinare equazioni cartesiane per π_1 e scrivere π_2 come sottovarietà lineare $P + V_{\pi_2}$.
 2. Determinare posizione reciproca, distanza ed eventuale intersezione tra π_1 e π_2 .
 3. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : -2x + y + z = 5$ e π_2 .
 4. Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela a π_1 e a π_2 e passante per $Q = (0, 1, 0)$.
-

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!