

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

2o appello - 8 febbraio 2022

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_3 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$Z = \langle (0, 1, -1, 0), (2, -1, 2, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle.$$

- Mostrare che W è un sottospazio vettoriale e calcolare una base e la dimensione di W e Z ;
- Calcolare una base e la dimensione di $W \cap Z$ e $W + Z$. Stabilire se Z e W sono in somma diretta.
- Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(h+1, h, -h, 1)$ appartiene a $W + Z$.
- Definire, se esiste, il complemento ortogonale di $W + Z$ e calcolarne la dimensione e una base.

Esercizio 2. In $M_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2, si consideri l'endomorfismo $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ così definito

$$f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ che di $\operatorname{im} f$.
- Determinare la controimmagine $f^{-1}(\mathbf{z})$ del vettore $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la controimmagine $f^{-1}(\mathcal{S})$ del sottospazio vettoriale $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ delle matrici simmetriche di $M_2(\mathbb{R})$. Stabilire se $f^{-1}(\mathbf{z})$ e $f^{-1}(\mathcal{S})$ sono dei sottospazi vettoriali del dominio.
- Determinare la matrice associata all'endomorfismo $f \circ f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r : \begin{cases} 5x + y &= 0 \\ x + z &= -4 \end{cases}$$

ed i 2 punti $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, -1, 1)$.

- Determinare le equazioni parametriche di r e le equazioni cartesiane della retta s passante per P_1 e P_2 .
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1 e P_2 e parallelo alla retta r .
- Determinare la distanza di r da π .
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π' contenente r e perpendicolare a π .

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
- La durata del compito è di **90 minuti**.
- È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

2o appello - 8 febbraio 2022

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, -x_1 + 2x_4 = 0 \right\}$$

$$Z = \langle (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 1) \rangle.$$

- Mostrare che W è un sottospazio vettoriale e calcolare una base e la dimensione di W e Z ;
- Calcolare una base e la dimensione di $W \cap Z$ e $W + Z$. Stabilire se Z e W sono in somma diretta.
- Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(h+1, h, -h, 1)$ appartiene a $W + Z$.
- Definire, se esiste, il complemento ortogonale di $W + Z$ e calcolarne la dimensione e una base.

Esercizio 2. In $M_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2, si consideri l'endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ così definito

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c-b & d \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ che di $\operatorname{im} f$.
- Determinare la controimmagine $f^{-1}(\mathbf{z})$ del vettore $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e la controimmagine $f^{-1}(\mathcal{S})$ del sottospazio vettoriale $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ delle matrici simmetriche di $M_2(\mathbb{R})$. Stabilire se $f^{-1}(\mathbf{z})$ e $f^{-1}(\mathcal{S})$ sono dei sottospazi vettoriali del dominio.
- Determinare la matrice associata all'endomorfismo $f \circ f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r: \begin{cases} x & = & 0 \\ y + 2z & = & 1 \end{cases}$$

ed i 2 punti $P_1 = (0, 0, -4)$, $P_2 = (1, -5, -5)$.

- Determinare le equazioni parametriche di r e le equazioni cartesiane della retta s passante per P_1 e P_2 .
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1 e P_2 e parallelo alla retta r .
- Determinare la distanza di r da π .
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π' contenente r e perpendicolare a π .

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
- La durata del compito è di **90 minuti**.
- È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.