

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

4o appello - 12 settembre 2022

ESERCIZI

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ vettori in $\mathbb{R}^3$ e sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ il sottospazio da essi generato.

- (a) Si determini il sottospazio $U^\perp$ complemento ortogonale di U , ed una sua base.
- (b) Si determini un sottospazio W non nullo che sia complementare ad U , ma non ortogonale, ed una sua base.
- (c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 1, 1)$ su $U^\perp$.
- (d) Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ in modo da ottenere una base ortonormale.

Esercizio 2. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa queste proprietà: $\ker(\phi)$ è il piano di $\mathbb{R}^3$ avente vettore normale $v = (1, 2, -1)$ e $u = (1, -1, 1)$ è un autovettore di ϕ relativo all'autovalore $\lambda = -1$.

- (a) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di ϕ .
- (b) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$, il vettore $v = (t, 1, 1)$ appartiene al nucleo di ϕ ?
- (c) Determinare la matrice $M = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \phi}$ associata a ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$.
- (d) Determinare se ϕ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}MP$ sia una matrice diagonale D . Scrivere esplicitamente D in tal caso.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il piano

$$\pi : 3x - y + z = -2$$

- (a) Determinare le equazioni parametriche del piano π ;
- (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta r ortogonale a π e passante per $P = (0, 2, 0)$;
- (c) Determinare la distanza del punto $Q_1 = (3, 1, 1)$ da π ed il punto Q di π che ha minima distanza da Q_1 ;
- (d) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene r e passa per Q_2 .

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
- La durata del compito è di **90 minuti**.
- È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami all'indirizzo:

<https://esami.elearning.unipd.it/mod/assign/view.php?id=49801>

- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.