

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

1o appello - 23 gennaio 2023

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$w_1 = (1, 0, 0, -1), w_2 = (1, 0, 1, 3), w_3 = (0, 2, -1, 0), w_4 = (4, 4, -1, 0)$$

Sia U il sottospazio di equazioni:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare una relazione di dipendenza lineare tra w_1, w_2, w_3, w_4 . Determinare una base di W e le sue equazioni cartesiane.
- Determinare una base di U .
- Verificare che U è un sottospazio di W ed estendere la base di U trovata in b) ad una base di W .
- Sia L il sottospazio generato dai vettori $l_1 = (1, 1, 0, 3)$ e $l_2 = (2, 0, 1, 0)$. Determinare una base di $U \cap L$.

Esercizio 2. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa queste proprietà: $\phi(1, 2, 0) = (1, -4, -2)$, $\phi(0, 3, 0) = (0, -6, -3)$ e $v = (0, -3, -1)$ è un autovettore di ϕ relativo all'autovalore $\lambda = -2$.

- Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- Determinare gli autovalori e una base per ciascun autospazio di ϕ .
- Determinare se l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile e fornire una sua diagonalizzazione.
- Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $w = (3, 0, 1)$ sull'autospazio di ϕ relativo a quell'autovalore di ϕ con molteplicità algebrica più grande.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta

$$s : X = (0, 1, -1) + t \cdot (2, -1, 2), t \in \mathbb{R}$$

e i punti $A = (1, 1, 1), B = (0, 0, 2)$.

- Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B ;
- Determinare se r e s sono parallele, incidenti o sghembe;
- Determinare la distanza tra r e s ;
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo alle rette r e s e da queste equidistante.

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
 - Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
 - Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
 - La durata del compito è di **90 minuti**.
 - È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
 - Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami all'indirizzo:
-
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
 - NON consegnare fogli di brutta copia.
 - Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
 - Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

1o appello - 23 gennaio 2023

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$w_1 = (0, 1, 0, -1), w_2 = (0, 1, 1, 3), w_3 = (2, 0, -1, 0), w_4 = (4, 4, -1, 0)$$

Sia U il sottospazio di equazioni:
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare una relazione di dipendenza lineare tra w_1, w_2, w_3, w_4 . Determinare una base di W e le sue equazioni cartesiane.
- Determinare una base di U .
- Verificare che U è un sottospazio di W ed estendere la base di U trovata in b) ad una base di W .
- Sia L il sottospazio generato dai vettori $l_1 = (1, 1, 0, 3)$ e $l_2 = (0, 2, 1, 0)$. Determinare una base di $U \cap L$.

Esercizio 2. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa queste proprietà: $\phi(2, 1, 0) = (-4, 1, -2)$, $\phi(3, 0, 0) = (-6, 0, -3)$ e $v = (-3, 0, -1)$ è un autovettore di ϕ relativo all'autovalore $\lambda = -2$.

- Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- Determinare gli autovalori e una base per ciascun autospazio di ϕ .
- Determinare se l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile e fornire una sua diagonalizzazione.
- Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $w = (0, 3, 1)$ sull'autospazio di ϕ relativo a quell'autovalore di ϕ con molteplicità algebrica più grande.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta

$$s : X = (1, 0, -1) + t \cdot (-1, 2, 2), t \in \mathbb{R}$$

e i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 2)$.

- Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B ;
- Determinare se r e s sono parallele, incidenti o sghembe;
- Determinare la distanza tra r e s ;
- Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo alle rette r e s e da queste equidistante.

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
 - Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
 - Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
 - La durata del compito è di **90 minuti**.
 - È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
 - Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami all'indirizzo:
-
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
 - NON consegnare fogli di brutta copia.
 - Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
 - Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.