

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

18 gennaio 2022

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia W l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, b) e (c, d) sono ortogonali al vettore $v = (2, -1)$. Sia U l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, c) e (b, d) appartengono al sottospazio $\langle v \rangle$.

- Mostrare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinare una sua base.
- Determinare una base di U .
- Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
- Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in U o in W tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti (motivare la risposta).
- (FACOLTATIVO) Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in $U + W$ tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Stabilire per quali valori di a f_a è un isomorfismo.
- Per ogni valore di a calcolare la controimmagine $f_a^{-1}((1, 0, 0))$.
- Stabilire per quali valori di a si ha $\ker f_a \oplus \operatorname{im} f_a = \mathbb{R}^3$.
- Posto $a = 1$, stabilire se f_a è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, determinare una matrice di cambiamento di base P che diagonalizza f_a , ossia $P^{-1}A_aP$ è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r = (2, 0, 3) + \langle (4, 5, 1) \rangle$$

ed i piani

$$\pi_1 : (0, 0, 1) + \langle (1, 1, 1), (1, 2, -2) \rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + z = 2.$$

- Determinare una forma parametrica della retta t ortogonale al piano π_1 e passante per il punto $P = (1, 2, 2)$.
- Determinare una forma parametrica della retta $s = \pi_1 \cap \pi_2$.
- Determinare posizione reciproca e distanza tra le rette r e s .
- Determinare tutti i punti Q dello spazio euclideo, per i quali

$$\operatorname{dist}(Q, r) = \operatorname{dist}(Q, s)$$

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
 - Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
 - Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
 - La durata del compito è di **90 minuti**.
 - È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
 - Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami all'indirizzo:
-
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
 - NON consegnare fogli di brutta copia.
 - Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
 - Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE 2

DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

18 gennaio 2022

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia W l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, b) e (c, d) sono ortogonali al vettore $v = (1, -2)$. Sia U l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, c) e (b, d) appartengono al sottospazio $\langle v \rangle$.

- Mostrare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinare una sua base.
- Determinare una base di U .
- Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
- Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in U o in W tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti (motivare la risposta).
- (FACOLTATIVO) Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in $U + W$ tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1+a & -1 & 0 \\ 2+2a & -2a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Stabilire per quali valori di a f_a è un isomorfismo.
- Per ogni valore di a calcolare la controimmagine $f_a^{-1}((1, 0, 0))$.
- Stabilire per quali valori di a si ha $\ker f_a \oplus \operatorname{im} f_a = \mathbb{R}^3$.
- Posto $a = -1$, stabilire se f_a è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, determinare una matrice di cambiamento di base P che diagonalizza f_a , ossia $P^{-1}A_aP$ è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r = (0, 3, 2) + \langle (5, 1, 4) \rangle$$

ed i piani

$$\pi_1 : (0, 1, 0) + \langle (1, 1, 1), (2, -2, 1) \rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 : -x + y + z = 2.$$

- Determinare una forma parametrica della retta t ortogonale al piano π_2 e passante per il punto $P = (1, 2, 2)$.
- Determinare una forma parametrica della retta $s = \pi_1 \cap \pi_2$.
- Determinare posizione reciproca e distanza tra le rette r e s .
- Determinare tutti i punti Q dello spazio euclideo, per i quali

$$\operatorname{dist}(Q, r) = \operatorname{dist}(Q, s)$$

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
 - Non è consentito avere con sé libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
 - Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.
 - La durata del compito è di **90 minuti**.
 - È possibile ritirarsi **dopo 40 minuti dall'inizio**: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
 - Alla fine del compito, prima della riconsegna, dovrete fare la scansione del vostro elaborato e caricarlo su moodle-esami all'indirizzo:
-
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
 - NON consegnare fogli di brutta copia.
 - Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
 - Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.