

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 hanno sempre intersezione non banale.
- 2) Ogni matrice diagonalizzabile in $M_3(\mathbb{R})$ ha tre autovalori distinti.
- 3) I piani $\pi : (0, 0, 1) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ e $\sigma : (1, 0, 1) + \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} x - y & x - y \\ 2x - 2y & 2x - 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1) Stabilire se f è un isomorfismo.
- 2) Calcolare l'antiimmagine mediante f della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- 3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^4}$.
- 4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ f = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0, x + 2z = 0\}$.

- i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (2, -1, 0), (1, -1, -1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V .
- ii) Determinare tutti gli elementi di $S + V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(3, -2, -1)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Stabilire se A e B sono simili.
- b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?
- c) Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(continua)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

- i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r . Una siffatta retta è unica?
- ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r . Un siffatto piano è unico?
- iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r . Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 hanno sempre intersezione non banale.
- 2) Ogni matrice diagonalizzabile in $M_3(\mathbb{R})$ ha almeno due autovalori distinti.
- 3) I piani $\pi : (0, 0, 1) + \langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$ e $\sigma : (0, 1, 2) + \langle (0, 1, 0), (0, 1, 2) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} z - t & z - t \\ 3z - 3t & 3z - 3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1) Stabilire se f è un isomorfismo.
- 2) Calcolare l'antiimmagine mediante f della matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
- 3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^4}$.
- 4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ f = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0, x + 2y = 0\}$.

- i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (2, 0, -1), (1, -1, -1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V .
- ii) Determinare tutti gli elementi di $S + V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(3, -1, -2)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Stabilire se A e B sono simili.
- b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?
- c) Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(continua)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

- i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r . Una siffatta retta è unica?
- ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r . Un siffatto piano è unico?
- iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r . Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 hanno sempre intersezione non banale.
- 2) Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ non è diagonalizzabile allora A ha almeno due autovalori uguali.
- 3) I piani $\pi : (2, 0, 1) + \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$ e $\sigma : (1, 0, 1) + \langle (1, 2, 0), (0, 1, 0) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} 2(x-t) & 2(x-t) \\ -x+t & -x+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1) Stabilire se φ è un isomorfismo.
- 2) Calcolare l'antiimmagine mediante φ della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^4}$.
- 4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ \varphi = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0, 2x + z = 0\}$.

- i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (0, -1, 2), (-1, -1, 1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V .
- ii) Determinare tutti gli elementi di $S + V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(-1, -2, 3)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Stabilire se A e B sono simili.
- b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?
- c) Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(continua)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$

- i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r . Una siffatta retta è unica?
- ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r . Un siffatto piano è unico?
- iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r . Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 3 hanno sempre intersezione non banale.
- 2) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ non è diagonalizzabile allora A ha almeno un autovalore nullo.
- 3) I piani $\pi : (2, 0, 1) + \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ e $\sigma : (1, 0, 0) + \langle (1, 2, 2), (0, 1, 1) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} 3(x-z) & 3(x-z) \\ -x+z & -x+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1) Stabilire se ψ è un isomorfismo.
- 2) Calcolare l'antiimmagine mediante ψ della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ \psi = id_{\mathbb{R}^4}$.
- 4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ \psi = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0, 2x + z = 0\}$.

- i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (-1, 0, 2), (-1, -1, 1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su W .
- ii) Determinare tutti gli elementi di $S + W$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(-2, -1, 3)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Stabilire se A e B sono simili.
- b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?
- c) Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(continua)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

- i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r . Una siffatta retta è unica?
- ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r . Un siffatto piano è unico?
- iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r . Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.