

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-07-08

I Appello di recupero

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La retta $(1, 0, 0) + \langle (1, 2, 0) \rangle$ è uguale alla $(0, 2, 0) + \langle (-1, -2, 0) \rangle$

2) La matrice associata all'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

rispetto alle basi $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $B' = \{3\}$ di $\mathbb{R}$ è $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare nelle incognite x, y, z, w :

$$\begin{cases} kx + y + z = k + 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + z + (1 - k)w = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia data la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} f: M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & H^{-1}AH \end{array}$$

a) Si determini la matrice F associata a f rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ (quella data da $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

b) Si determini $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. f è isomorfismo?

c) Calcolare $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

d) 1 è autovalore per l'endomorfismo f ? Se sì calcolare l'autospazio relativo all'autovalore a 1.

e) Si consideri $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | X = X^t\}$ (X^t è la trasposta della matrice X). Calcolare $f(S)$.

f) Determinare T sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta con S e tale che $S \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.

i) Trovare tutti i sottospazi V di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_V(V) = \{(0, 0, 0)\}$.

- ii) Trovare tutti i W sottospazi di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{W^\perp}(W) = \{(0, 0, 0)\}$.
- iii) Trovare tutti i sottospazi U di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_U(\mathbb{R}^3) = \langle (1, 0, 2) \rangle$.
- iv) Trovare tutti i sottospazi Z di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{\langle (1, 0, 0) \rangle}(Z) = \{(0, 0, 0)\}$.

Esercizio 4. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

- 1) Trovare l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per $(0, 0, 0)$.
- 2) Trovare un piano π parallelo a r passante per $(0, 0, 0)$ e tale che la distanza di π da r sia $d(\pi, r) = \sqrt{3}$.
- 3) Posto $t = \sigma \cap \pi$ si calcoli la distanza di t da r : $d(t, r)$.
- 4) Determinare s retta ortogonale a r tale che $d(r, s) = \sqrt{3}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

I appello

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1)

2)

3)

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$ il sistema lineare nelle incognite x, y, z, w :

$$\begin{cases} (1-h)x + y + z = -h + 2 \\ x + y + z + hw = 1 \\ x + (1-h)y + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia data la matrice $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} g: & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto L^{-1}AL \end{array}$$

a) Si determini la matrice G associata a g rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ (quella data da $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

b) Si determini $\text{Ker } g$ e $\text{Im } g$. g è isomorfismo?

c) Calcolare $g^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

d) 1 è autovalore per l'endomorfismo g ? Se sì calcolare l'autospazio relativo all'autovalore a 1.

e) Si consideri $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | X = X^t\}$ (X^t è la trasposta della matrice X). Calcolare $g(S)$.

f) Determinare T sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta con S e tale che $S \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.

i) Trovare tutti i sottospazi V di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{V^\perp}(V^\perp) = \{(0, 0, 0)\}$.

ii) Trovare tutti i W sottospazi di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{W^\perp}(W) = \{(0, 0, 0)\}$.

iii) Trovare tutti i sottospazi U di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_U(\mathbb{R}^3) = \langle(-2, 0, 1)\rangle$.

iv) Trovare tutti i sottospazi Z di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{\langle(0,0,1)\rangle}(Z) = \{(0, 0, 0)\}$.

Esercizio 4. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

- 1) Trovare l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per $(0, 0, 0)$.
- 2) Trovare un piano π parallelo a r passante per $(0, 0, 0)$ e tale che la distanza di π da r sia $d(\pi, r) = \sqrt{3}$.
- 3) Posto $t = \sigma \cap \pi$ si calcoli la distanza di t da r : $d(t, r)$.
- 4) Determinare s retta ortogonale a r tale che $d(r, s) = \sqrt{3}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

I appello

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1)

2)

3)

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$ il sistema lineare nelle incognite x, y, z, w :

$$\begin{cases} (s+1)x + y + z = s+2 \\ x + (s+1)y + z = 1 \\ x + y + z - sw = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia data la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & KAK^{-1} \end{array}$$

- a) Si determini la matrice L associata a α rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ (quella data da $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
- b) Si determini $\text{Ker} \alpha$ e $\text{Im} \alpha$. α è isomorfismo?
- c) Calcolare $\alpha^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
- d) 1 è autovalore per l'endomorfismo α ? Se sì calcolare l'autospazio relativo all'autovalore a 1.
- e) Si consideri $S = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = X^t \right\}$ (X^t è la trasposta della matrice X). Calcolare $\alpha(S)$.
- f) Determinare T sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta con S e tale che $S \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.

- i) Trovare tutti i sottospazi V di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_V(V) = \{(0, 0, 0)\}$.
- ii) Trovare tutti i W sottospazi di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{W^\perp}(W) = \{(0, 0, 0)\}$.
- iii) Trovare tutti i sottospazi U di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_U(\mathbb{R}^3) = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
- iv) Trovare tutti i sottospazi Z di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{\langle (0, 1, 0) \rangle}(Z) = \{(0, 0, 0)\}$.

Esercizio 4. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

- 1) Trovare l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per $(0, 0, 0)$.
- 2) Trovare un piano π parallelo a r passante per $(0, 0, 0)$ e tale che la distanza di π da r sia $d(\pi, r) = \sqrt{3}$.
- 3) Posto $t = \sigma \cap \pi$ si calcoli la distanza di t da r : $d(t, r)$.
- 4) Determinare s retta ortogonale a r tale che $d(r, s) = \sqrt{3}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

I appello

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1)

2)

3)

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema lineare nelle incognite x, y, z, w :

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x + y + z = \alpha + 3 \\ x + (\alpha + 2)y + z = 1 \\ x + y + z - (\alpha + 1)w = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} h : M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M^{-1}AM \end{array}$$

- a) Si determini la matrice H associata a h rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ (quella data da $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
- b) Si determini $\text{Ker} h$ e $\text{Im} h$. h è isomorfismo?
- c) Calcolare $h^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
- d) 1 è autovalore per l'endomorfismo h ? Se sì calcolare l'autospazio relativo all'autovalore a 1.
- e) Si consideri $S = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = X^t \right\}$ (X^t è la trasposta della matrice X). Calcolare $h(S)$.
- f) Determinare T sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta con S e tale che $S \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.

- i) Trovare tutti i sottospazi V di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_V(V) = \{(0, 0, 0)\}$.
- ii) Trovare tutti i W sottospazi di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{W^\perp}(W) = \{(0, 0, 0)\}$.
- iii) Trovare tutti i sottospazi U di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_U(\mathbb{R}^3) = \langle (-2, 1, 2) \rangle$.
- iv) Trovare tutti i sottospazi Z di $\mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale $p_{\langle (1, 1, 0) \rangle}(Z) = \{(0, 0, 0)\}$.

Esercizio 4. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

- 1) Trovare l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per $(0, 0, 0)$.
- 2) Trovare un piano π parallelo a r passante per $(0, 0, 0)$ e tale che la distanza di π da r sia $d(\pi, r) = \sqrt{3}$.
- 3) Posto $t = \sigma \cap \pi$ si calcoli la distanza di t da r : $d(t, r)$.
- 4) Determinare s retta ortogonale a r tale che $d(r, s) = \sqrt{3}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.