

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

II prova parziale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Il piano $\pi_1 : x - y + z + 3 = 0$ è ortogonale al piano $\pi_2 : x + y = 3$.
- 2) Due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli.
- 3) Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B)$ allora A è simile a B .

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\{(1, 2, 0), (3, 1, 5)\}$.

- 1) Posto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y + z = 3\}$, trovare, se esistono, tutti i vettori $v \in L$ tali che la proiezione ortogonale di v su U sia $p_U(v) = (1, 0, 2)$.
- 2) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(S) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- 3) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(W) = \langle (1, 2, 0) \rangle$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha(2-\alpha) & 0 & -\alpha(\alpha-1) \\ \alpha(1+\alpha) & 4-2\alpha & \alpha(\alpha-2) \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α ha un autovalore reale di molteplicità geometrica 2.
- b) Per tutti i valori del parametro trovati nel punto precedente stabilire se la matrice A_α è diagonalizzabile.
- c) Posto $\alpha = 1$ mostrare che la matrice A_1 è simile ad una matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.
- d) Poste nella domanda precedente $a = 0$ e $b = 1$, si determini una matrice H tale che $H^{-1}A_1H = B$.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

ed $s_a : (-1, 0, 0) + \langle (a, a+1, -2a-1) \rangle$ con $a \in \mathbb{R}$.

(continua)

- i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la retta r sia parallela a s_a .
- ii) Per i valori trovati al punto precedente calcolare la distanza $d(r, s_a)$.
- iii) Poste $a = -1$ e $s = s_{-1}$, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente r e s .
- iv) Trovare, se possibile, una retta t che intersechi r nel punto $R = (1, 2, 0)$ e sia ortogonale a r e a $v = (3, 2, -1)$. Calcolare la distanza $d(t, s)$ tra t e s .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

II prova parziale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Tre vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali.
- 2) La retta $(1, 2, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle$ è ortogonale al piano $x - y = 3$.
- 3) Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ con $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ allora A è simile a B .

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\{(-2, 1, 0), (-3, 1, 1)\}$.

- 1) Posto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - z = 2\}$, trovare, se esistono, tutti i vettori $v \in L$ tali che la proiezione ortogonale di v su U sia $p_U(v) = (-1, 0, 1)$.
- 2) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(S) = \{(0, 0, 0)\}$.
- 3) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(W) = \langle (-2, 1, 0) \rangle$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} (a-1)(3-a) & 0 & (1-a)(a-2) \\ a(a-1) & 3-a & (a-1)(a-3) \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

- a) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a ha un autovalore reale di molteplicità geometrica 2.
- b) Per tutti i valori del parametro trovati nel punto precedente stabilire se la matrice M_a è diagonalizzabile.
- c) Posto $a = 2$ mostrare che la matrice M_2 è simile ad una matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- d) Poste nella domanda precedente $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, si determini una matrice H tale che $H^{-1}M_2H = B$.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 3x - y = 3 \\ -3x + y + z = -2 \end{cases}$$

ed $s_a : (0, 1, 0) + \langle (1, -a, a+3) \rangle$ con $a \in \mathbb{R}$.

(continua)

- i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la retta r sia parallela a s_a .
- ii) Per i valori trovati al punto precedente calcolare la distanza $d(r, s_a)$.
- iii) Poste $a = -3$ e $s = s_{-3}$, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente r e s .
- iv) Trovare, se possibile, una retta t che interseca r nel punto $R = (1, 0, 1)$ ortogonale a r e a $v = (1, -1, 1)$ e calcolare la distanza $d(t, s)$ tra t e s .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

II prova parziale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- 1) Due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ sono ortogonali.
- 2) La retta $(1, 2, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle$ è ortogonale alla retta $(1, 5, -10) + \langle (2, 0, -2) \rangle$.
- 3) Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ con gli stessi autovalori allora A è simile a B .

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\{(0, 2, 1), (1, -4, -1)\}$.

- 1) Posto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 1\}$, trovare, se esistono, tutti i vettori $v \in L$ tali che la proiezione ortogonale di v su U sia $p_U(v) = (1, 0, 1)$.
- 2) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(S) = \{(0, 0, 0)\}$.
- 3) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(W) = \langle (0, 2, 1) \rangle$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$P_h = \begin{pmatrix} 1 - h^2 & 0 & h^2 + h \\ h^2 + 3h + 2 & 1 - h & h^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 + h \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- a) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice P_h ha un autovalore reale di molteplicità geometrica 2.
- b) Per tutti i valori del parametro trovati nel punto precedente stabilire se la matrice P_h è diagonalizzabile.
- c) Posto $h = 0$ mostrare che la matrice P_0 è simile ad una matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.
- d) Poste nella domanda precedente $a = 0$ e $b = 1$, si determini una matrice H tale che $H^{-1}P_0H = B$.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2z = -4 \end{cases}$$

ed $s_a : (0, 0, 1) + \langle (3a + 1, a, 2a + 1) \rangle$ con $a \in \mathbb{R}$.

(continua)

- i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la retta r sia parallela a s_a .
- ii) Per i valori trovati al punto precedente calcolare la distanza $d(r, s_a)$.
- iii) Poste $a = -1$ e $s = s_{-1}$, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente r e s .
- iv) Trovare, se possibile, una retta t che interseca r nel punto $R = (-2, 0, 1)$ ortogonale a r e a $v = (0, 1, 1)$ e calcolare la distanza $d(t, s)$ tra t e s .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 17-03-08

II prova parziale

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

- a) Il piano $x + 17y + 13z = 0$ è ortogonale alla retta $(1, 2, 0) + \langle (1, 17, 13) \rangle$.
- b) Tre vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due paralleli.
- c) Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ con lo stesso determinante e gli stessi autovalori allora A è simile a B .

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\{(1, 0, 1), (-2, 1, 1)\}$.

- 1) Posto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2z = -1\}$, trovare, se esistono, tutti i vettori $v \in L$ tali che la proiezione ortogonale di v su U sia $p_U(v) = (-3, 1, 0)$.
- 2) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(S) = \{(0, 0, 0)\}$.
- 3) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $p_U(W) = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} k(4-2k) & 0 & (k-2)(1-k) \\ (2-k)(3-k) & 2k & k(k-2) \\ 0 & 0 & 4-2k \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice B_k ha un autovalore reale di molteplicità geometrica 2.
- b) Per tutti i valori del parametro trovati nel punto precedente stabilire se la matrice B_k è diagonalizzabile.
- c) Posto $k = 1$ mostrare che la matrice B_1 è simile ad una matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.
- d) Poste nella domanda precedente $a = 0$ e $b = 1$, si determini una matrice H tale che $H^{-1}B_1H = C$.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

ed $s_a : (1, 0, 1) + \langle (a + 3, a - 1, a) \rangle$ con $a \in \mathbb{R}$.

(continua)

- i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la retta r sia parallela a s_a .
- ii) Per i valori trovati al punto precedente calcolare la distanza $d(r, s_a)$.
- iii) Poste $a = -2$ e $s = s_{-2}$, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente r e s .
- iv) Trovare, se possibile, una retta t che intersechi r nel punto $R = (1, 1, 1)$ e sia ortogonale a r e a $v = (-1, 0, 2)$. Calcolare la distanza $d(t, s)$ tra t e s .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.