

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata: risposta non accettata):

1. L'insieme $\{(0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ può essere l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in tre variabili a coefficienti reali.
2. I vettori $(1, 3), (2, 1), (1, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti.
3. Il rango di una matrice A è il numero di righe non nulle di A .

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, l'insieme S_t delle soluzioni del sistema lineare Σ_t nelle incognite x, y, z :

$$\Sigma_t : \begin{cases} x + (1+t)z = -1-t \\ 2x + ty + tz = -t \\ -x + y + z = 1+t \end{cases}$$

b) Sia $V = (-2, 0, -3) + \langle (2, 0, 2) \rangle$. Stabilire se esistono $t \in \mathbb{R}$ tali che $S_t = V$.

Esercizio 2. Siano assegnate le seguenti matrici di $M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Indicati con S il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici A, B, C e con T quello generato da A', B', C' , si determinino le dimensioni di T e di S .
2. Determinare una base di $S \cap T$ ed una base di $S + T$.
3. Costruire, se possibile, un endomorfismo φ di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \ker(\varphi) \subset T$ e $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 3$. Scrivere la matrice di φ rispetto ad una base opportuna di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f_k(x, y, z, t) = (x, y, z, t) + k(x, z, y, t).$$

1. Scrivere la matrice di f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker f_k$ ed una base di $\operatorname{Im} f_k$, e mostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha: $\ker f_k \oplus \operatorname{Im} f_k = \mathbb{R}^4$.
3. Determinare, se possibile, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f_{k_1} \circ f_{k_2} = 0$.

Esercizio 4 Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

1. Mostrare che se f è iniettiva allora i vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
2. Siano $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linearmente indipendenti. Stabilire se f è iniettiva.

N.B. Ogni affermazione va opportunamente giustificata.