

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 10-12-07

Docenti: Chiarellotto - Cantarini

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- a) Se due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ sono ortogonali allora sono linearmente indipendenti.
- b) L'equazione $x - 2y + 3z = 1$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descrive un piano parallelo al vettore $(1, -2, 3)$.
- c) Ogni matrice simmetrica è simile ad una matrice ortogonale.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Il sottospazio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- b) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- c) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- d) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?

Esercizio 2 Si considerino i sottospazi $U = \langle (1, 0, 2), (1, 2, 0) \rangle$ e $W = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- a) Calcolare, se esiste, un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (1, 0, 2)$.
- b) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{w})$ su U di ogni vettore $\mathbf{w} \in W$.
- c) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 2x + z = 2 \\ 3y - z = 3 \end{cases}.$$

- a) Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, 4, 2)$ ed ortogonali ad r .
- b) Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r . Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- c) Dato il piano π di equazione cartesiana: $x - y - z = 1$ determinare una retta per P giacente su tale piano sghemba con r . Determinare tutte le siffatte rette.

(continua)

Esercizio 4

- a) Dare una definizione di matrice ortogonale.
- b) Dare tutte le definizioni alternative di matrice ortogonale e giustificare l'equivalenza delle definizioni date. Costruire una matrice ortogonale di ordine due in cui la prima colonna sia un vettore parallelo a $(1, 1)$. Costruire una matrice ortogonale di ordine due in cui la prima riga sia un vettore parallelo a $(1, 1)$.
- c) Dimostrare che la molteplicità algebrica di un autovalore λ è maggiore della molteplicità geometrica di λ o uguale ad essa.
- d) Mostrare che se A è una matrice quadrata di ordine 3 con polinomio caratteristico $(a-\lambda)(b-\lambda)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, allora A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ * & a & 0 \\ * & 0 & b \end{pmatrix},$$

dove i simboli $*$ rappresentano dei numeri reali.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 10-12-07

Docenti: Chiarellotto - Cantarini

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- a) Esistono due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ ortogonali e linearmente dipendenti.
- b) Il sistema di equazioni $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ descrive una retta passante per il punto $(2, 1)$.
- c) Ogni matrice simmetrica è simile ad una matrice invertibile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 2 & -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Il sottospazio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- b) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- c) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- d) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?

Esercizio 2 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, 0, 1), (0, 2, -1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- a) Calcolare, se esiste, un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, 0, 1)$.
- b) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{w})$ su U di ogni vettore $\mathbf{w} \in W$.
- c) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 3x + y = 4 \\ y + 2z = 1 \end{cases}.$$

- a) Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, 4, 2)$ ed ortogonali ad r .
- b) Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r . Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- c) Dato il piano π di equazione cartesiana: $x - y - z = 1$ determinare una retta per P giacente su tale piano sghemba con r . Determinare tutte le siffatte rette.

(continua)

Esercizio 4

- a) Dare una definizione di matrice diagonalizzabile.
- b) Dare tutte le definizioni alternative di matrice diagonalizzabile anche in termini di applicazione lineare associata. Fornire condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile. Fornire condizioni solo necessarie ma non sufficienti.
- c) Dimostrare che una matrice simmetrica di ordine 2 è ortogonalmente diagonalizzabile.
- d) Mostrare che se B è una matrice quadrata di ordine 3 con polinomio caratteristico $(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)^2$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$, allora B è simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_1 & * \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

dove i simboli $*$ rappresentano dei numeri reali.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 10-12-07

Docenti: Chiarellotto - Cantarini

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- a) Nello spazio euclideo tridimensionale, dati un piano π ed punto $P \notin \pi$, esiste una ed una sola retta per P ortogonale a π .
- b) L'equazione $3x - 2y = 1$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descrive un piano passante per il punto $(1, 1, 0)$.
- c) Esistono matrici ortogonali con determinante nullo.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Il sottospazio $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- b) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- c) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- d) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?

Esercizio 2 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, -1, 0), (0, 1, 2) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- a) Calcolare, se esiste, un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, -1, 0)$.
- b) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{w})$ su U di ogni vettore $\mathbf{w} \in W$.
- c) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases}.$$

- a) Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, -2, 2)$ ed ortogonali ad r .
- b) Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r . Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- c) Dato il piano π di equazione cartesiana: $x + y - z = 3$ determinare una retta per P giacente su tale piano sghemba con r . Determinare tutte le siffatte rette.

(continua)

Esercizio 4

- a) Dare una definizione di matrice diagonalizzabile.
- b) Dare tutte le definizioni alternative di matrice diagonalizzabile illustrandone il significato in termini di applicazione lineare associata. Fornire condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile. Fornire condizioni solo necessarie ma non sufficienti.
- c) Dimostrare che una matrice simmetrica di ordine 2 è ortogonalmente diagonalizzabile.
- d) Mostrare che se B è una matrice quadrata di ordine 3 con polinomio caratteristico $(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)^2$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$, allora B è simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_1 & * \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

dove i simboli $*$ rappresentano dei numeri reali.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

Corso di Matematica 2

II^a prova di accertamento – Padova 10-12-07

Docenti: Chiarellotto - Cantarini

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- a) Nello spazio euclideo tridimensionale, dati una retta r ed un punto $P \notin r$, esiste un'unica retta s passante per P ortogonale ad r .
- b) L'equazione $3x - 2y = 1$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ descrive una retta parallela al vettore $(3, -2)$.
- c) Ogni matrice simmetrica è simile ad una matrice diagonale.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Il sottospazio $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- b) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- c) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- d) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?

Esercizio 2 Si considerino i sottospazi $U = \langle (2, 0, -1), (0, 2, 1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- a) Calcolare, se esiste, un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (2, 0, -1)$.
- b) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{w})$ su U di ogni vettore $\mathbf{w} \in W$.
- c) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3y + z = 3 \end{cases}.$$

- a) Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, -2, 2)$ ed ortogonali ad r .
- b) Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r . Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- c) Dato il piano π di equazione cartesiana: $x + y - z = 3$ determinare una retta per P giacente su tale piano sghemba con r . Determinare tutte le siffatte rette.

(continua)

Esercizio 4

- a) Dare una definizione di matrice ortogonale.
- b) Dare tutte le definizioni alternative di matrice ortogonale e giustificare l'equivalenza delle definizioni date. Costruire una matrice ortogonale di ordine due in cui la prima colonna sia un vettore parallelo a $(1, 1)$. Costruire una matrice ortogonale di ordine due in cui la prima riga sia un vettore parallelo a $(1, 1)$.
- c) Dimostrare che la molteplicità algebrica di un autovalore λ è maggiore della molteplicità geometrica di λ o uguale ad essa.
- d) Mostrare che se A è una matrice quadrata di ordine 3 con polinomio caratteristico $(a-\lambda)(b-\lambda)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, allora A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ * & a & 0 \\ * & 0 & b \end{pmatrix},$$

dove i simboli $*$ rappresentano dei numeri reali.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate