

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-3-4-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 29 Gennaio 2013
Ultimo appello di recupero A.A.2011/2012
Tema n.1

Risolvere i seguenti esercizi motivandone lo svolgimento. Esercizi non motivati verranno ignorati.

Esercizio 1. (6 punti). Si consideri il sistema parametrico Σ_k nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 con parametro reale k :

$$\begin{cases} x_1 + kx_3 + x_4 = 1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 = k \\ x_1 + kx_2 + (3k+2)x_3 + x_4 = 2k+2 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + (k^2+k)x_4 = k \end{cases}$$

1. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia un'unica soluzione e calcolarla. (2,5 punto)
2. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia più soluzioni e per tali valori risolvere il sistema. (2,5 punti)
3. Esistono valori del parametro reale k tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 punto)

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_1 = 0\}.$$

1. Determinare una base di $U \cap V$. I sottospazi U e V sono in somma diretta? (2 punti);
2. Determinare un'equazione cartesiana di $U + V$ (2 punti);
3. verificare che $w = (4, 2, -1, -5) \in U + V$ e determinare vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $u + v = w$ (2 punti).

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 2y + z, x + 2y, z).$$

1. Determinare una base del nucleo di L e una base dell'immagine di L . L'applicazione lineare L è iniettiva? È suriettiva? (2 punti)
2. Determinare la matrice associata a L rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$; $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (4, 4, 3, 1)$; $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ (2 punti);
3. È possibile costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L \circ f$ sia iniettiva? (1 punto)

(continua)

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile (3 punti);
- (b) Determinare un valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che esista una base ortonormale di autovettori e calcolarla (3 punti);
- (c) determinare i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale (1 punto).

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la retta $r : (2, 1, 0) + \langle (0, 1, 0) \rangle$

- 1. Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano π contenente r e ortogonale al vettore $v = (1, 0, 1)$ (2 punti);
- 2. determinare le equazioni cartesiane delle rette s_1 e s_2 contenute nel piano $\sigma : x - z = 2$ e distanti $\sqrt{2}$ da r (2 punti).
- 3. determinare la distanza fra la retta r e la retta $t : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ (2 punti).

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-3-4-5

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 29 Gennaio 2013

Ultimo appello di recupero A.A.2011/2012

Tema n.2

Risolvere i seguenti esercizi motivandone lo svolgimento. Esercizi non motivati verranno ignorati.

Esercizio 1. (6 punti). Si consideri il sistema parametrico Σ_k nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 con parametro reale k :

$$\begin{cases} x_1 - kx_3 + x_4 = 1 \\ kx_2 + (k-1)x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + (2-3k)x_3 + x_4 = -2k + 2 \\ -kx_2 + (1-k)x_3 + (k^2 - k)x_4 = -k \end{cases}$$

1. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia un'unica soluzione e calcolarla. (2,5 punto)
2. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia più soluzioni e per tali valori risolvere il sistema. (2,5 punti)
3. Esistono valori del parametro reale k tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 punto)

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (-1, -1, 1, 1), (1, -1, -1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_1 = 0\}.$$

1. Determinare una base di $U \cap V$. I sottospazi U e V sono in somma diretta? (2 punti);
2. Determinare un'equazione cartesiana di $U + V$ (2 punti);
3. verificare che $w = (-4, -2, 1, 5) \in U + V$ e determinare vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $u + v = w$ (2 punti).

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (-x + 2y + z, -x + 2y + z, -x + 2y, z).$$

1. Determinare una base del nucleo di L e una base dell'immagine di L . L'applicazione lineare L è iniettiva? È suriettiva? (2 punti)
2. Determinare la matrice associata a L rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 0)$; $\mathbf{u}_2 = (-1, -1, 0)$; $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (2, 2, 1, 1)$; $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ (2 punti);
3. È possibile costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L \circ f$ sia iniettiva? (1 punto)

(continua)

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile (3 punti);
- (b) Determinare un valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che esista una base ortonormale di autovettori e calcolarla (3 punti);
- (c) determinare i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale (1 punto).

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la retta $r : (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 0) \rangle$

- 1. Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano π contenente r e ortogonale al vettore $v = (0, 1, 1)$ (2 punti);
- 2. determinare le equazioni cartesiane delle rette s_1 e s_2 contenute nel piano $\sigma : y - z = 2$ e distanti $\sqrt{2}$ da r (2 punti).
- 3. determinare la distanza fra la retta r e la retta $t : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ (2 punti).

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-3-4-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 29 Gennaio 2013
Ultimo appello di recupero A.A.2011/2012
Tema n.3

Risolvere i seguenti esercizi motivandone lo svolgimento. Esercizi non motivati verranno ignorati.

Esercizio 1. (6 punti). Si consideri il sistema parametrico Σ_k nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 con parametro reale k :

$$\begin{cases} x_1 + 2kx_3 + x_4 = 1 \\ 2kx_2 + (2k + 1)x_3 = 2k \\ x_1 + 2kx_2 + (6k + 2)x_3 + x_4 = 4k + 2 \\ 2kx_2 + (2k + 1)x_3 + (4k^2 + 2k)x_4 = 2k \end{cases}$$

1. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia un'unica soluzione e calcolarla. (2,5 punto)
2. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia più soluzioni e per tali valori risolvere il sistema. (2,5 punti)
3. Esistono valori del parametro reale k tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 punto)

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, 1, -1, -1), (-1, 1, -1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_2 = 0\}.$$

1. Determinare una base di $U \cap V$. U e V sono in somma diretta? (2 punti);
2. Determinare un'equazione cartesiana di $U + V$ (2 punti);
3. verificare che $w = (2, 4, -1, -5) \in U + V$ e determinare vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $u + v = w$ (2 punti).

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 2y + z, 2y + z, x).$$

1. Determinare una base del nucleo di L e una base dell'immagine di L . L'applicazione lineare L è iniettiva? È suriettiva? (2 punti)
2. Determinare la matrice associata a L rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$; $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1)$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ (2 punti);
3. È possibile costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L \circ f$ sia iniettiva? (1 punto)

(continua)

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile (3 punti);
- (b) Determinare un valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che esista una base ortonormale di autovettori e calcolarla (3 punti);
- (c) determinare i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale (1 punto).

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la retta $r : (0, 1, 2) + \langle (0, 1, 0) \rangle$

- 1. Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano π contenente r e ortogonale al vettore $v = (1, 0, 1)$ (2 punti);
- 2. determinare le equazioni cartesiane delle rette s_1 e s_2 contenute nel piano $\sigma : x - z = -2$ e distanti $\sqrt{2}$ da r (2 punti).
- 3. determinare la distanza fra la retta r e la retta $t : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ (2 punti).

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-3-4-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 29 Gennaio 2013
Ultimo appello di recupero A.A.2011/2012
Tema n.4

Risolvere i seguenti esercizi motivandone lo svolgimento. Esercizi non motivati verranno ignorati.

Esercizio 1. (6 punti). Si consideri il sistema parametrico Σ_k nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 con parametro reale k :

$$\begin{cases} x_1 - 2kx_3 + x_4 = 1 \\ -2kx_2 + (-2k + 1)x_3 = -2k \\ x_1 - 2kx_2 + (-6k + 2)x_3 + x_4 = -4k + 2 \\ -2kx_2 + (-2k + 1)x_3 + (4k^2 - 2k)x_4 = -2k \end{cases}$$

1. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia un'unica soluzione e calcolarla. (2,5 punto)
2. Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema Σ_k abbia più soluzioni e per tali valori risolvere il sistema. (2,5 punti)
3. Esistono valori del parametro reale k tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 punto)

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_1 = 0\}.$$

1. Determinare una base di $U \cap V$. U e V sono in somma diretta? (2 punti);
2. Determinare un'equazione cartesiana di $U + V$ (2 punti);
3. verificare che $w = (4, 2, -1, -5) \in U + V$ e determinare vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $u + v = w$ (2 punti).

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 2y + z, x + 2y, z).$$

1. Determinare una base del nucleo di L e una base dell'immagine di L . L'applicazione lineare L è iniettiva? È suriettiva? (2 punti)
2. Determinare la matrice associata a L rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$; $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$; $\mathbf{v}_4 = (4, 4, 3, 1)$ (2 punti);
3. È possibile costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L \circ f$ sia iniettiva? (1 punto)

(continua)

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile (3 punti);
- (b) Determinare un valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che esista una base ortonormale di autovettori e calcolarla (3 punti);
- (c) determinare i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale (1 punto).

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la retta $r : (2, 1, 0) + \langle (0, 1, 0) \rangle$

- 1. Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano π contenente r e ortogonale al vettore $v = (1, 0, 1)$ (2 punti);
- 2. determinare le equazioni cartesiane delle rette s_1 e s_2 contenute nel piano $\sigma : x - z = 2$ e distanti $\sqrt{2}$ da r (2 punti).
- 3. determinare la distanza fra la retta r e la retta $t : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ (2 punti).