

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 Giugno 2012
II prova parziale
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Posto $S = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$, indichiamo con $p_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio S e con $p_{S^\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $S^\perp$.

1. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S(v) = p_{S^\perp}(v)$.
2. Determinare tutti i vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S(w) = 2w$.
3. Determinare tutti i vettori z di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S^2(z) = p_S(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio) sia la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 4k+3 & 0 \\ -k+1 & 0 & 2k \\ 0 & 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Posto $k = -4$, verificare che -1 è autovalore di $(A_{-4})^2$ e calcolarne il relativo autospazio.
3. Sia B la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se per $k = -4$ le matrici A_{-4} e B sono simili in $M_3(\mathbb{C})$ (cioè se esiste una matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ invertibile tale che $H^{-1}A_{-4}H = B$).

(Attenzione: si può giustificare la risposta senza calcolare esplicitamente H).

4. Per $k = -4$ determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a f_{-4} rispetto alla base $\mathcal{B}$ (come base sia del dominio che del codominio).

Esercizio 3. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino il piano $\pi : 2x + y - 2z - 1 = 0$ e il punto $A = (1, -1, 0)$ di π .

1. Si determinino le equazioni cartesiane della retta s contenuta nel piano π passante per A e ortogonale alla retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
2. Calcolare le equazioni parametriche della retta di minima distanza fra r e s (ovvero della retta passante per i punti di minima distanza).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 3)\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-1, -1), (-1, -3)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ogni matrice di cambiamento di base è diagonalizzabile.

2B.

1. Se A e B sono matrici ortogonalmente diagonalizzabili allora anche AB è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. Data una matrice ortogonale A esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = 2v$.

3B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e due piani π_1, π_2 .

1. Se r è ortogonale sia a s che a t allora s e t sono ortogonali fra loro.
2. Se due piani π_1 e π_2 sono ortogonali fra loro allora essi si intersecano in una retta.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 Giugno 2012
II prova parziale
Tema n.2

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Posto $T = \langle (-2, 0, 1), (-2, 1, 1) \rangle$, indichiamo con $p_T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio T e con $p_{T^\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $T^\perp$.

1. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_T(v) = p_{T^\perp}(v)$.
2. Determinare tutti i vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_T(w) = 2w$.
3. Determinare tutti i vettori z di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_T^2(z) = p_T(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo g_h di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a g_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio) sia la matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} 0 & -4h+3 & 0 \\ h+1 & 0 & -2h \\ 0 & -2h & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice B_h sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Posto $h = 4$, verificare che -1 è autovalore di $(B_4)^2$ e calcolarne il relativo autospazio.
3. Sia C la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se per $h = 4$ le matrici B_4 e C sono simili in $M_3(\mathbb{C})$ (cioè se esiste una matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ invertibile tale che $H^{-1}B_4H = C$).

(Attenzione: si può giustificare la risposta senza calcolare esplicitamente H).

4. Per $h = 4$ determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che C sia la matrice associata a g_4 rispetto alla base $\mathcal{B}$ (come base sia del dominio che del codominio).

Esercizio 3. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino il piano $\pi : x + 2y - 2z - 1 = 0$ e il punto $A = (-1, 1, 0)$ di π .

1. Si determinino le equazioni cartesiane della retta s contenuta nel piano π passante per A e ortogonale alla retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
2. Calcolare le equazioni parametriche della retta di minima distanza fra r e s (ovvero della retta passante per i punti di minima distanza).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e due piani π_1, π_2 .

1. Se r è ortogonale sia a s che a t allora s e t non sono necessariamente ortogonali fra loro.
2. Se la direzione ortogonale al piano π_1 appartiene allo spazio direttore del piano π_2 allora i due piani si intersecano in una retta.

2B.

1. Se M e N sono matrici simmetriche allora MN è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. Data una matrice ortogonale A esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = 3v$.

3B.

1. La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{(1, 6), (2, 5)\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-1, -6), (-2, -5)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Ogni matrice quadrata con determinante non nullo è diagonalizzabile.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 Giugno 2012
II prova parziale
Tema n.3

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Posto $V = \langle (2, 0, -2), (2, 1, -2) \rangle$, indichiamo con $p_V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio V e con $p_{V^\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $V^\perp$.

1. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_V(v) = p_{V^\perp}(v)$.
2. Determinare tutti i vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_V(w) = 2w$.
3. Determinare tutti i vettori z di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_V^2(z) = p_V(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio) sia la matrice

$$F_a = \begin{pmatrix} 0 & -4a-3 & 0 \\ a-1 & 0 & -2a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tali che la matrice F_a sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Posto $a = -4$, verificare che -1 è autovalore di $(F_{-4})^2$ e calcolarne il relativo autospazio.
3. Sia B la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se per $a = -4$ le matrici F_{-4} e B sono simili in $M_3(\mathbb{C})$ (cioè se esiste una matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ invertibile tale che $H^{-1}F_{-4}H = B$).

(Attenzione: si può giustificare la risposta senza calcolare esplicitamente H).

4. Per $a = -4$ determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a f_{-4} rispetto alla base $\mathcal{B}$ (come base sia del dominio che del codominio).

Esercizio 3. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino il piano $\pi : 2x - y - 2z + 1 = 0$ e il punto $A = (0, -1, 1)$ di π .

1. Si determinino le equazioni cartesiane della retta s contenuta nel piano π passante per A e ortogonale alla retta r di equazioni: $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
2. Calcolare le equazioni parametriche della retta di minima distanza fra r e s (ovvero della retta passante per i punti di minima distanza).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. Se C e D sono matrici ortogonalmente diagonalizzabili allora anche DC è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. Data una matrice ortogonale A esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = -2v$.

2B.

1. La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 5)\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-1, -2), (-1, -5)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Ogni matrice invertibile è diagonalizzabile.

3B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e due piani π_1, π_2 .

1. Se r è ortogonale sia a s che a t allora s e t sono ortogonali fra loro.
2. Se due piani π_1 e π_2 hanno giaciture V_1 e V_2 tali che $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ allora essi si intersecano in una retta.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 Giugno 2012
II prova parziale
Tema n.4

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Posto $W = \langle (3, 0, 1), (3, 1, 1) \rangle$, indichiamo con $p_W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio W e con $p_{W^\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $W^\perp$.

1. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_W(v) = p_{W^\perp}(v)$.
2. Determinare tutti i vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_W(w) = 2w$.
3. Determinare tutti i vettori z di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_W^2(z) = p_W(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f_b di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_b rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio) sia la matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 4b-3 & 0 \\ -b-1 & 0 & 2b \\ 0 & 2b & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $b \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_b sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Posto $b = 4$, verificare che -1 è autovalore di $(A_4)^2$ e calcolarne il relativo autospazio.
3. Sia B la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se per $b = 4$ le matrici A_4 e B sono simili in $M_3(\mathbb{C})$ (cioè se esiste una matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ invertibile tale che $H^{-1}A_4H = B$).

(Attenzione: si può giustificare la risposta senza calcolare esplicitamente H).

4. Per $b = 4$ determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a f_4 rispetto alla base $\mathcal{B}$ (come base sia del dominio che del codominio).

Esercizio 3. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino il piano $\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$ e il punto $A = (1, 0, -1)$ di π .

1. Si determinino le equazioni cartesiane della retta s contenuta nel piano π passante per A e ortogonale alla retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
2. Calcolare le equazioni parametriche della retta di minima distanza fra r e s (ovvero della retta passante per i punti di minima distanza).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (2, 3)\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-2, -1), (-2, -3)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ogni matrice quadrata di rango massimo è diagonalizzabile.

2B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e due piani π_1, π_2 .

1. Se r è ortogonale sia a s che a t e s non è parallela a t , allora s e t sono ortogonali fra loro.
2. Se due piani π_1 e π_2 sono ortogonali fra loro allora essi si intersecano in una retta.

3B.

1. Se A e B sono matrici simmetriche allora anche AB è simmetrica.
2. Data una matrice ortogonale A esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = 5v$.