

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 6 Luglio 2012
II Appello
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite (x, y, z) , $\Sigma : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$,

1. si determinino gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} x + 3y = 1 + t^2 \\ y - tz = t - 1 \end{cases}$.
2. Per quali valori di t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_1 è compatibile cioè ammette soluzioni?

Esercizio 2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri la retta $r_k : \begin{cases} x = k(t - 2) \\ y = t \\ z = 2k - kt \end{cases}$.

1. Verificare che il punto $P = (0, 2, 0)$ appartiene a tutte le rette r_k e determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente tutte le rette r_k .
2. Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui le rette r_k hanno distanza 2 da 0.

Esercizio 3. Sia $V_0 = \langle (1, 3, 0, 0), (3, -1, 0, 0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e $V_1 = V_0^\perp$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $V_0 = \text{Ker}(f)$ e V_1 sia l'autospazio di f relativo all'autovalore 1.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare $f^{-1}(\{(1, 3, 0, 0)\})$ e $f^{-1}(\{(0, 0, 0, 1)\})$.
3. L'endomorfismo f è ortogonalmente diagonalizzabile?

Esercizio 4. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Siano p_{S_1} e p_{S_2}

1. Determinare una base di $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = (0, 0, 0, 0)\}$.
2. Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = v$.

Esercizio 5. Si considerino $U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$ e $V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b - c + d = 0 \}$ sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$.

1. Determinare una base e dimensione per $U \cap V$ e $U + V$.
2. Determinare, se esistono, due vettori $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti tali che

$$\langle A \rangle \oplus U = U + V = \langle B \rangle \oplus U$$

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Sia A una matrice quadrata di ordine 4:

1. Se rango di A è 4, allora 0 non è autovalore di A .
2. Se il polinomio caratteristico di A è $(T^2 - 1)^2$, A è diagonalizzabile.

2B. Si considerino i numeri complessi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ e $z_3 = i$

1. Il modulo del numero complesso $z_1 z_2 z_3$ è 3.
2. Il prodotto $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$ è un numero reale.

3B.

- 1.
- 2.