

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U_h = \langle (3, h, 5, 0), (0, h, 12, 0), (0, 0, 3, 0) \rangle \quad V = \langle (3, 2, 3, 1), (0, 1, 2, 1) \rangle$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Per ogni valore del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ determinare una base di U_h , dimensione di U_h ed equazioni cartesiane.
2. Determinare una base $\mathcal{B}_h$ di $U_h \cap V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Completare la base $\mathcal{B}_h$ del punto precedente a base di $\mathbb{R}^4$.
4. Posto $h = 1$ e $U = U_1$ determinare se esistono tutti i vettori $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tali che la proiezione ortogonale su U del vettore v sia $p_U(v) = (0, 0, 0, 1)$.
5. Determinare se esistono tutti i vettori $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tali che la proiezione ortogonale su U del vettore v sia $p_U(v) = (1, 1, 1, 0)$.
6. Solo per i vettori v trovati nel punto precedente calcolare $p_{\langle (1,1,1,0) \rangle}(v)$.

Esercizio 2.

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & 5k+3 & 0 \\ -k+1 & k & 2k \\ 0 & 2k & -k \end{pmatrix}$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Determinare, se esistono, tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile.
3. Per $k = -2$ la matrice A_{-2} è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M_3(\mathbb{C})$?

4. Per $k = -2$ la matrice A_{-2} è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M_3(\mathbb{R})$?

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : (0, 1, 1) + \langle (1, 2, 0) \rangle \quad ; \quad s : (2, 0, 1) + \langle (2, -1, 0) \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r e s .
2. Determinare le equazioni cartesiane della retta t parallela alla retta s e passante per $(0, 0, 0)$.
3. Calcolare la distanza fra r e t e la distanza fra s e t .
4. Esiste una retta l passante per $Q = (-2, 3, 2)$ che intersechi r, s e t ? Se si determinarne le equazioni parametriche.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. Esistono matrici ortogonali ortogonalmente diagonalizzabili.
2. Esistono matrici ortogonali di determinante 2.

2B.

1. La matrice nulla in $M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile.
2. Ogni matrice quadrata di determinante 1 è diagonalizzabile.

3B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e i piani π_1, π_2 .

1. Se r è ortogonale a s e anche la retta t è ortogonale a r allora r e s sono ortogonali fra loro.
2. Se due piani π_1 e π_2 sono ortogonali fra loro allora essi si intersecano in una retta.