

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

CANALI 2, 4, 5

DOCENTI: FIOROT, LONGO, MENEGAZZO

13 Settembre 2013

## DOMANDE

1. Supponiamo che  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sia una base dello spazio vettoriale  $V$ . Dimostrare che anche  $v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n$  è una base di  $V$ .
2. (a) Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo dello spazio vettoriale  $V$ . Completare la definizione: il vettore  $v \in V$  è un autovettore per  $f$  se...  
(b) Supponiamo che l'endomorfismo  $f$  sia invertibile. È vero che se  $v$  è autovettore per  $f$  allora  $v$  è autovettore anche per  $f^{-1}$ ? (breve dimostrazione o controesempio)
3. Nello spazio  $\mathbb{R}^n$  con il solito prodotto scalare è fissato il vettore  $u \neq 0$ . Per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  determinare un  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $v - xu$  sia ortogonale ad  $u$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Sia  $f(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$  un polinomio a coefficienti reali. Sapendo che due delle soluzioni dell'equazione  $f(X) = 0$  sono  $i$  e  $2 - i$ , dove  $i \in \mathbb{C}$  è l'unità immaginaria, si determinino, se esistono, i coefficienti  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Si considerino le due funzioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  e  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definite dalle seguenti condizioni:

$$f(1, -1, 0)^t = (1, 1, 0, 0)^t; \quad f(0, 1, 1)^t = (0, 1, 0, 1)^t; \quad f(0, 0, 1)^t = (0, 0, -1, 1)^t;$$

$$g(x, y, z, w)^t = (-3x + 3y - 3z, -x + y - z, -2x + 2y - 2z, -3x + 3y - 3z)^t.$$

1. Determinare la matrice di  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  e di  $\mathbb{R}^4$ .
2. Calcolare una base dell'immagine  $V := \text{im}(f)$  di  $f$ , specificandone la dimensione.
3. Calcolare una base del nucleo  $W = \ker(g)$  di  $g$ , specificandone la dimensione.
4. Determinare il numero minimo di equazioni necessario a descrivere  $W$  e un insieme minimo di equazioni che descrivono  $W$  giustificando la risposta.
5. Determinare una base di  $U = V \cap W$ , l'intersezione dell'immagine di  $f$  e del nucleo di  $g$ .
6. Determinare una base ortonormale di  $U$ .
7. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore  $v = (1, 1, 1, 1)^t$  su  $U$ .

**Esercizio 3.** Al variare del parametro reale  $k$ , si considerino le matrici

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & k(k+1) & k^2 - k - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - k & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutti i valori del parametro  $k$  per i quali la matrice  $A_k$  risulta diagonalizzabile.
2. Per ciascuno dei valori del parametro  $k$  determinati al punto precedente, determinare una base di autovettori per  $A_k$ .
3. Per tutti i valori del parametro  $k$  per i quali  $A_k$  risulta diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale  $D_k$  ed una matrice invertibile  $H_k$  tali che  $A_k = H_k D_k H_k^{-1}$ .
4. Per  $H_k$  determinata al punto precedente, si calcoli  $H_k^{-1}$ .

**Esercizio 4.** Sia  $\pi$  il piano dello spazio affine euclideo di dimensione 3 descritto dall'equazione cartesiana  $x - y + z = 2$ .

1. Scrivere l'equazione parametrica di  $\pi$ .
2. Scrivere l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per il punto  $P = (1, 1, 1)$  e perpendicolare al piano  $\pi$ .
3. Calcolare la distanza  $d$  del punto  $P$  dal piano  $\pi$ , determinando il punto  $Q \in \pi$  di minima distanza.

---

### Regole d'esame

---

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc.).
- Consegnare il **foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.