

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia – Ing. Meccanica (Canali 2, 3)

Docenti: C. Bertolin, L. Fiorot, L. Martini

II appello 2023/24

Data: 09/02/2024

Tema: A

Regole d'esame. Durata: **1 ora e 30 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

- **ESERCIZIO 1.** Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Calcolare le dimensioni dei sottospazi $U, U^\perp, U \cap U^\perp, U + U^\perp$. (3 pts)
2. Determinare una base di $U^\perp$. (1 pts)
3. Trovare una base ortonormale di U . (2 pts)
4. Dato

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base di $U \cap W$ ed equazione cartesiana per $U + W$. (2 pts)

- **SOLUZIONE 1.**

1. $\dim U = \dim U^\perp = 2, \dim(U \cap U^\perp) = 0, \dim(U + U^\perp) = 4$.
2. Una base di $U^\perp$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. Una base ortonormale di U è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$.
4. $B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; equazione cartesiana di $U + W : x_1 - x_3 - x_4 = 0$.

- **ESERCIZIO 2.** Si consideri l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione ed una base di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. (2 pt)
- (b) Si dica se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (1 pt)
- (c) Si dica se $A^2 = A \cdot A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D che sia simile ad A^2 . (2 pt)

• **SOLUZIONE 2.**

- (a) La matrice di f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa ha determinante 1 quindi f è invertibile perciò è iniettiva e suriettiva. Quindi una base di $\text{Ker } f = \emptyset$ essendo $\dim \text{Ker } f = 0$ e una base di $\text{Im } f = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ essendo f suriettiva.

- (b) Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} \det(A - x\mathbf{1}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)(x^2-1) - (x-1) - (-1+x) \\ &= (1-x)(x^2-1) - 2(x-1) = -(x-1)[(x^2-1)+2] \\ &= -(x-1)(x^2+1). \end{aligned}$$

Poiché x^2+1 non è fattorizzabile su $\mathbb{R}$ nel prodotto di polinomi di primo grado, A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

- (c) Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo A^2 simmetrica per il Teorema spettrale essa è ortogonalmente diagonalizzabile quindi è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A^2 è

$$\begin{aligned} \det(A^2 - x\mathbf{1}_3) &= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \\ &= -(1+x)(x^2-1) = -(x+1)^2(x-1). \end{aligned}$$

Quindi A^2 è simile a $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **ESERCIZIO 3.** Siano r ed s due rette nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + u \\ y = -2 \\ z = 3 - u \end{cases}$$

con $t, u \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che le due rette r ed s sono sghembe. (1 pt)
2. Determinare i punti di minima distanza tra r ed s ed equazioni cartesiane della retta passante per questi punti. (2 pt)
3. Calcolare la distanza fra r ed s . (2 pt)

- **SOLUZIONE 3.**

1. I vettori direttori di r ed s non sono paralleli. Inoltre $r \cap s$ è vuoto. Dunque le rette sono sghembe.
2. I punti di minima distanza sono $\overline{R} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ -2/2 \end{pmatrix}$ (corrispondente a $t = -1/3$) su r e $\overline{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (corrispondente a $u = 2$) su s . La retta cercata ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

3. $d(r, s) = d(\overline{R}, \overline{S}) = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

- **TEORIA**

- (a) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo. (3 pt)
- (b) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale. (3 pt)